Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Pro gradu -tutkielma

Luonnon geometriaa ja geometriaa luonnossa

Tekijä:
Senni Ryhtä

Ohjaaja:
Juha Oikkonen

25. marraskuuta 2015

HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tekijä — Författare — Author

Senni Ryhtä

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Luonnon geometriaa ja geometriaa luonnossa

Oppiaine — Läroämne — Subject

Matematiikka

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Marraskuu 2015	51 s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Työni ensimmäinen osio on teoriaosio, jossa esittelen symmetrian, Fibonaccin lukujonon, kultaisen leikkauksen ja fraktaalit. Esittelen aiheet matemaattisesti ja annan esimerkkejä elollisesta ja elottomasta luonnosta, joista kyseisiä aiheita löytyy. Aiheet on valittu siten, että ne voidaan opettaa yläkoulussa yksinkertaistaen. Teoriataustan lisäksi olen tutkinut eheyttävän opetuksen historiaa ja pohtinut nykypäivän opetusta kouluissa eheyttävän opetuksen kannalta. Esittelen myös uusimmasta opetussuunnitelmasta eheyttävän opetuksen tavoitteet.

Teoriataustan ja eheyttävän opetuksen tarkastelun pohjalta olen luonut opetustuokioita, joiden avulla yläkoulussa voidaan toteuttaa eheyttävää opetusta matematiikan ja biologian osalta. Tuokiot on jaettu kolmeen erilaiseen osioon, joissa jokainen esittelee erilaisen tavan yhdistää kahta oppiainetta. Ensimmäisen tuokion tavoitteena on harrastuksen kautta matematiikan integrointi oppilaan omaan elämään. Valitsin aiheeksi mehiläisten matematiikan ja olenkin luonut sen ympärille kokonaisuuden, josta voi hyödyntää kokonaisuuden lisäksi yksittäisiä osia. Toinen osio esittelee matematiikan opettamista luonnossa. Sen tavoite on näyttää, ettei oppimistilanteen tarvitse aina sijoittua luokkahuoneeseen. Tässä osiossa olen hyödyntänyt kiertopistetyöskentelyä. Viimeinen osio on tunnin alun motivoinnit, jotka olen luonut toimimaan esimerkkeinä siitä, miten opettaja voi pienillä teoilla tuoda matematiikan lähemmäs oppilaan arkea. Motivoinneista olen luonut valmiit diaesitykset, jotka on kaikkien käytettävissä.

Työni tarkoitus on näyttää opettajille, miten eheyttävää opetusta voi toteuttaa yläkoulussa ja pohtia eheyttävän opetuksen merkitystä. Tutkimuksen mukaan opettajat kaipaavat valmiita opetuspakettaja ja olenkin pyrkinyt luomaan mahdollisimman erilaisia tuokioita, jotta opettajilla olisi mahdollisuus nähdä miten laaja eheyttämisen kenttä on. Nykypäivänä usein eheyttävä opetus toteutetaan kouluissa yksittäisinä teemapäivinä, jolloin oppilaille jää helposti niiden yhteys muuhun opetukseen irralliseksi. Tästä syystä pyrin esittelemään tapoja, miten eheyttävää opetusta voi toteuttaa yläkouluissa matematiikan ja biologian osalta.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Kumpulan kampuskirjasto

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Sisältö

Johdanto

Jouluna 2013 sain siskoltani joululahjaksi Alex Bellosin kirjan Kiehtova matematiikka. Siskoni oli nähnyt opuksen kaupassa ja todennut, ettei voisi löytää täydellisempää lahjaa minulle. Avauttuani paketin istuinkin useamman tunnin uppoutuneena kirjaan. Siskoni naureskeli, että kukaan muu ei voi innostua tuollaisesta kirjasta noin paljoa. Kirjasta löytyi useita mielenkiintoisia matemaatisia pulmia ja sovelluksia. Jopa niin mielenkiintoisia, että päätin kirjoittaa tämän työn kirjasta löytyneestä aiheesta.

Käsittelen työssäni luonnon geometriaa ja geometriaa luonnossa, joista olen pyrkinyt luomaan opetustuokioita yläkouluun. Ensimmäinen kappale käsittelee täysin teoriaa geometriasta joita luonnosta löytyy. Olen ottanut esimerkkejä elollisesta sekä elottomasta luonnosta. Pääsääntöisesti pysyn kuitenkin elollisen luonnon parissa. Luonnosta toki löytyy paljon enemmän geometriaa kuin mitä olen tähän työhöni saanut kirjoitettua ja olenkin etsinyt esimerkkejä, joita on mahdollista selittää yläkouluikäiselle. Tarkoituksen mukaista ei olekaan esitellä monimutkaista matematikkaa, jota luonnosta löytyy, vaan antaa kuva siitä miten biologiaa ja matematiikkaa voisi integroida yläkoulun opetuksessa.

Tutkiessani valitsemiani aiheita huomasin, että materiaalia löytyy loputtomasti. Haastavaa oli valita kaikesta siitä tiedosta juuri se, mitä itse haluan työssäni tuoda esille. Vaikka kuinka pyrin kirjoittamaan kaiken selkeästi auki, jää jotain aina sanomatta. Alun teoria ei kuitenkaan ollut päätavoitteeni, joten lukijan ollessa aiheesta enemmän kiinnostunut, löytyy jokaisesta aiheesta rutkasti lisää tietoa kirjallisuudesta.

Työni keskeisin osio on opetustuokioiden suunnittelu ja toteutus. Suunnittelussa pohdin eheyttävän opetuksen historiaa ja sen nykypäivää opetussuunnitelman avulla. Tarkastelen myös muiden tutkimuksia eheyttävästä opetuksesta ja pyrin niiden pohjalta luomaan omat opetustuokioni. Eheyttävästä opetuksesta tietoa löytyy kovin hajanaisesti ja tutkimuksiakin on tehty yllättävän vähän siihen verrattuna, että aiheesta on puhuttu opetussuunnitelmien yhteydessä jo vuosikymmenien ajan. Esittelen työssäni kolme erilaista tutkimusta aiheesta ja pyrin niiden avulla kertomaan eheyttävän opetuksen matkan opetuksen historiassa ja millaisia neuvoja ja työvälineitä opettajat kaipaavat eheyttävän opetuksen tueksi.

Lopulta pääsen esittelemään työni hedelmän eli opetustuokiot, jotka olen suunnitellut. Tuokioissa olen pyrkinyt käyttämään erilaisia opetusmetodeja näyttääkseni, että integroivaa opetusta voidaan toteuttaa monella eri tavalla. Tuokiot on jaettu kolmeen selkeästi erilaiseen osioon. Ensimmäinen on kokonaisuus mehiläisten matematiikasta, tämä on esimerkki harrastuksen liittämisestä koulumaailmaan ja sen avulla innostamista sekä opiskeluun, että harrastamiseen. Toinen osioni on laskemista luonnossa, johon olen suunnitellut tehtäviä, jotka on tarkoitus tehdä poissa luokkahuone ympäristöstä. Tämän osion tarkoitus on osoittaa, ettei matematiikkaa tarvitse aina opettaa luokassa ja että integroinnilla voidaan tarkoittaa muutakin kuin tehtäviä, joissa lasketaan omenia tai banaaneja. Viimeisenä esittelen tunnin alun motivoinnit, jotka toimivat esimerkkinä opettajajohtoisesta työskentelystä. Motivoinnit on tarkoitettu antamaan oppilaille suoria yhteyksiä, siihen missä matematiikaa on ja mihin matematiikkaa tarvitaan.

Viimeisessä kappaleessa pohdin kirjoitusprosessia ja siinä esiintyneitä ongelmia. Pohdin myös miten teoriaa ja opetustuokioita voisi jatkossa kehittää. Pohdintani juontaa välillä sivuraiteille ja päädyn miettimään opettajankoulutuksen järjestämistä. Pohdinnan on tarkoitus koota ajatukseni tekemästäni työstä. Toivottavasti työni innostaa opettajia etsimään omia kiinnostuksen kohteita, joita voisi luokassa tuoda esille ja innostaa samalla oppilaita löytämään omansa. Kaikki lähtee opettajan innostuksesta.

Vielä ennen teoriaosuuden alkua, haluan kiittää ihmisiä, jotka ovat olleet tukenani työtä tehdessäni. Ensinnäkin kiitos siskolleni oman innostukseni löytymisestä saamani kirjan avulla, et ehkä ymmärtänytkään lahjaa valitessasi, kuinka tärkeäksi se vielä muodostuu. Lisäksi haluan kiittää Markus Niinikoskea, joka on ottanut kuvia työtäni varten toiveideni mukaisesti, sekä Mika Koskenojaa palautteesta, jonka avulla pystyin kehittämään työni tähän muotoon.

1 Luonnossa esiintyvää geometriaa

Tässä luvussa käsittelen luonnosta löytyvää geometriaa. Olen valinnut käsiteltäviksi kohteiksi symmetrian, Fibonaccin lukujonon, kultaisen leikkausen ja fraktaalit. Nämä siitä syystä, että kaikkia näitä voidaan löytää luonnosta ja ne voidaan käsitellä yläkoulun matematiikan avulla yksinkertaistaen. Luvun tarkoitus on esitellä käsitteiden teoriaa, sekä antaa esimerkkejä luonnosta.

Luonnosta löytyy paljon matematiikkaa, eikä työni tarkoitus ole esitellä niitä kaikkia, vaan antaa esimerkkejä siitä mistä geometriaa löytyy. Jätän käsittelemättä muun muassa virukset ja molekyylit, joista löytyy paljon symmetriaa ja geometrisia muotoja, ja joissa matematiikka on hyvinkin tärkeässä osassa niiden toimintaa. Nämä menevät kuitenkin yläkouluikäisille liian monimutkaisiksi, joten yritin löytää muutaman esimerkin, jota on helppo käsitellä yläkouluikäisten kanssa.

Monissa kohdissa on myös vaikea selittää miksi jokin organismi kasvaa juuri tällä tavalla. Työssäni käsittelen esimerkiksi, miksi lehdet kasvavat kasvin varren ympärille kultaisessa kulmassa toisiinsa nähden. Se ei kuitenkaan selitä sitä, miten kasvi tietää kasvattaa lehtensä juuri näin. Lähes joka kerta vastauksena näihin kysymyksiin on evoluutio. Evoluution ja luonnonvalinnan kautta elollinen luonto näyttää siltä miltä näyttää. Otetaan esimerkiksi mikä tahansa kukka, joka kasvattaa lehtensä varren ympäri kultaisen kulman päähän toisistaan. Tällä kasvutavalla jokainen lehti saa maksimaalisen määrän auringon valoa osakseen, eikä uusi lehti kasva koskaan täysin aiempien päälle. Tälläiset kasvit ovat pärjänneet parhaiten ja näin ne ovat pystyneet lisääntymään enemmän, varmemmin ja laadukkaammin. Luonnonvalinnan ansiosta tätä kasvutapaa hyödyntäneet kasvit ovat pärjänneet paremmin jolloin geenikanta tälle kasvutavalle on vahvistunut ja muut strategiat ovat hävinneet.

Sama selitys pätee lähestulkoon kaikessa. Evoluutio on muokannut organismeista tehokkaampia ja sellaiset organismit ovat pärjänneet parhaiten, joissa on esimerkiksi käytössä optimoitu tilankäyttö. Kasvilla ei siis ole tietokonetta, joka laskee kulman lehtien kasvun väliin, vaan se tieto sijaitsee geeneissä ja jokainen solu osaa näiden geenien avulla toimia juuri niinkuin on parhaaksi havaittu aikojen saatossa. Kyseinen kasvi siirtää tämän tiedon siementensä geeneissä eteenpäin, jolloin seuraava sukupolvi osaa jälleen kasvattaa lehtensä oikein. Toki pitää muistaa mutaatiot, jotka muokkaavat geenejä, joten jokainen yksilö ei ole aina täydellinen. Mutaatiot ovat kuitenkin hyvä asia, ilman niitä muutosta ei tapahtuisi, eikä parasta vaihtoehtoa ikinä löydettäisi. Mutaatioiden ja sattuman avulla organismit ovat muovautuneet sellaisiksi kuin ne nyt ovat. Pitää muistaa, että jos mutaatio ei ole ollut kasville edullinen, on se joutunut käyttämään johonkin muuhun energiaansa enemmän, jolloin siemenien tuotto on jäänyt vähemmälle ja näin ollen tämän kaltainen mutaatio ei ole päässyt yleistymään.

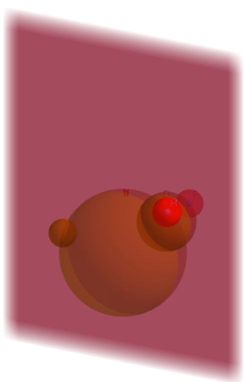
1.1 Symmetria

Arkikielessä symmetriaa käytetään kahdessa merkityksessä. Symmetrialla voidaan tarkoittaa sopusuhtaisuutta ja tasapainoa tai sillä voidaan viitata useiden osien yhteensopivuuteen. (Weyl, s.13-15.) Kappaleiden perussymmetrioita ovat kierto, siirto ja heijastus. Siirrolla on aina suunta ja etäisyys, kierto kiertää kappaletta akselin ympäri tietyn kulman verran ja heijastus peilaa kappaleen peilaussuoran suhteen erikätiseksi. (avoin oppikirja, s.26). Kappale on symmetrinen, jos siinä esiinty yksikin näistä perussymetrioista. Symmetria säilyttää aina kappaleen muodon, koon ja kulmien suurudet sekä osien etäisyydet.

Bilateraalisymmetrialla tarkoitetaan vasemman ja oikean välistä symmetriaa. Termistä käytetään usein suomenkielistä käännöstä kaksikylkisymmetria, kun puhutaan eläimistä. Perussymmetrioista tämä kuuluu siis heijastussymmetriaan. Tälläista symmetriaa löytyy luonnosta paljon. Monet korkeamman tason eläimet noudattavat bilateraalisymmetriaa, jolloin eläin voidaan jakaa symmetriasuoralla pystysuuntaisesti kahtia. Nyt vasen ja oikea puoli ovat toistensa peilikuvia. Bilateria-akseli voi olla joko horisontaalinen tai sagittaalinen eli vaaka- tai pystysuorassa. Ihminen on bilateraalisymmetrinen, samoin esimerkiksi ravut. (Weyl, s.14).

Kuvat 1.-3. esittävät pirroskuvana eri tasot, joilla eläin voidaan jakaa kahteen puoliskoon. Ensimmäisessä kuvassa on horisontaalitaso, toisessa sagittaalitaso ja kolmannessa transversaalitaso. Tasot pysyvät samana, vaikka tarkasteltava otus nousisi esimerkiksi pystyyn. Tämä tarkoittaa sitä, että ihmisen jakaa ala- ja yläosaan horisontaalitaso, oikeaan ja vasempaan sagittaalitaso, etu- ja takapuoleen transversaalitaso.

1.



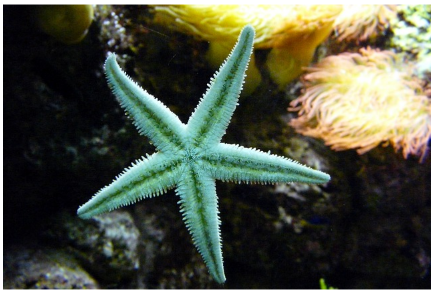
2.

3.

Seuraavalla sivulla on kuva ravusta, johon on merkitty sagittaalinen symmetriaakseli. Sagittaalitaso jakaa ravun vasempaan ja oikeaan puoliskoon, jotka ovat peilikuvia toisilleen. Rapukuvan vieressä on kuva orkideasta, jonka kukka on bilateriaalisymmetrinen.

4.  5. 

Säteittäissymmetria noudattaa perussymetrioista kiertoa. Siinä eläintä voidaan pyöräyttää akselin ympäri tietyn kulman verran ja tilanne pysyy samana kuin lähtötilanteessa. Säteittäissymmetriseen kohteeseen voidaan piirtää sen keskipisteen kautta kulkevia tasoja, jotka jakavat eläimen kahteen samanalaiseen puoliskoon. Säteittäissymmetriset eläimet ovat siis myös kaksikylkisymmetrisiä, mutta kaksikylkisymmetriset eivät ole säteittäissymmetrisiä. (Weyl, s.53). Säteittäisymmetrisiä eläimä ovat mm. piikkinahkaisten pääjaksoon kuuluvat eläimet ja polttiaiseläimet. Piikkinahkaiset ovat sekundaarisesti säteittäissymetrisiä, eli niiden aikuismuoto on säteittäissymetrinen, toukkavaihe näillä on kaksikylkisymmetrinen. Polttiaiseläimet ovat primaarisesti säteittäissymetrisiä. Esimerkiksi kuvassa esiintyvä Piikkinahkaisten pääjaksoon kuuluva meritähti on säteittäissymmetrinen ja sillä on viisi symmetria-akselia. Monet kukinnot noudattavat myös säteittäissymetriaa.

6. 

Ihmissilmä on tottunut symmetrisiin kuvioihin ja näin ollen huomaa helpommin symmetrian puuttumisen ja pitää sitä jotenkin ongelmallisena. Tästä syystä symmetrisyyttä pidetään yleisesti kauniina ja siihen pyritään arkkitehtuurissa ja taiteessa. Pythagoralaiset pitävät avaruuden palloa ja tason ympyrää kauneimpina geometrisina kuvioina täydellisen kiertosymmetriansa takia. (Weyl, s.15).

Kolmas perussymmetrioista eli siirtosymmetria onkin hieman haastavampi löytää sellaisenaa luonosta. Monissa hyönteisissä kuvioinnista löytyy siirtosymmetriaa ja kasvi voi kasvattaa kaksi kukkavanaa pienen etäisyyden päähän toisistaan. Siirtosymmetriaa käsiteltäessä on tärkeä erottaa se heijastussymetriasta, sillä epäsymmetrinen kappale voidaan siirtosymmetrian avulla linkittää symmetrisyyteen, jolloin kyseiset kappalet ovat symmetrisiä keskenään, vaikkeivat sitä yksin olekaan.

1.2 Fibonaccin lukujono

Aidatulle alueelle laitetaan pupupari. Montako pupuparia aidatulla alueella on vuoden kuluttua, jos oletetaan, että yksikään ei kuole kokeen aikana ja jokainen pupupari saa yhden parin jälkeläisiä joka kuukausi? Oletetaan myös, että vastasyntynyt pupupari saavuttaa sukukypsyyden kuukaudessa ja syntynyt pupupari lisääntyy keskenään jatkossa joka kuukausi.

Ensimmäisenä kuukautena aitauksessa on vain alkuperäinen pupupari. Toisena kuukautena alkuperäinen pari saa ensimäisen parin jälkeläisiä, mutta ainoastaan alkuperäinen pari on sukukypsä. Kolmantena kuukautena alkuperäinen pupari saa toisen parin jälkeläisiä, jolloin aitauksessa on kolme paria pupuja, joista kaksi paria on saavuttanut sukukypsyyden. Neljäntenä kuukautena nämä kaksi sukukypsää paria saavat jälkeläisiä, jolloin aitauksessa on viisi pupuparia. Viidestä pupuparista kaksi oli valmiiksi sukukypsiä, yksi saavuttaa sukukypsyyden ja kaksi ovat vastasyntyneitä. Seuraavassa taulukossa kuvataan aitauksen pupuparien lukumäärä vuoden jokaisena kuukautena.

kuukausi	vastasyntyneiden pupuparien lkm	sukukypsien pupuparien lkm	pupuparien lkm yhteensä
0	1	0	1
1	0	1	1
2	1	1	2
3	1	2	3
4	2	3	5
5	3	5	8
6	5	8	13
7	8	13	21
8	13	21	34
9	21	34	55
10	34	55	89
11	55	89	144
12	89	144	233

Näin muodostuvaa lukujonoa kutsutaan Fibonaccin lukujonoksi ja jokaista sen alkiota Fibonaccin luvuksi. Kyseinen lukujono muodostuu kahden peräkkäisen lukujonon luvun summasta, eli $n_1 = n_3 - n_2$. Pelkästään tämä ehto ei kuitenkaan riitä Fibonaccin lukujonon määrittelemiseksi, sillä mm. lukujono 2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, ... toteuttaa kyseisen ehdon, olematta kuitenkaan Fibonaccin lukujono. Fibonaccin lukujonosta määritellään kiinteiksi alkioiksi kaksi ensimmäistä alkiota, jolloin näiden avulla voidaan laskea mikä tahansa lukujonon alkio oikein. Vorob'ev kirjassaan Fibonacci numbers määrittelee lukujonon kaksi ensimmäistä alkiota ykkösiksi eli $n_1 = 1$ ja $n_2 = 1$. Lukujonon kaksi ensimmäistä alkiota voidaan määritellä myös nollaksi ja ykköseksi eli $n_1 = 0$ ja $n_2 = 1$, sillä tämä tilanne ei vaikuta muihin lukujonon alkioihin, kuten huomaamme ylläolevan taulukon sarakkeista sukukypsien pupuparien lukumäärä ja pupuparien lukumäärä yhteensä.

Fibonaccin lukuja löytyy luonnosta monesta paikkaa. Kasvit kasvattavat lehtiä usein Fibonaccin lukujen verran tai käyttävät hyväkseen kultaista leikkausta maksimoidessaan lehteen osuvan valon määrän. Tästä kuitenkin lisää kultaisesta leikkauksesta kertovassa kappaleessa. Mehiläisten sukupuusta löytyy Fibonaccin lukujono ja tästä löytyy esimerkki opetustuokioiden kohdalla.

Optimaalinen tilankäyttö kasvien ja eläinten kasvussa noudattaa usein Fibonaccin spiraalien kaavaa. Monet organismit kasvavat spiraalin muodossa ja joissain tapauksissa tämä kasvutapa on hyvinkin näkyvä kuten kävyissä ja etanoiden kuorissa. Osassa tapauksista kasvu tapahtuu useissa komponenteissa, joissa on havaittavissa spiraalin muotoa kuten ananaksen kuori ja kävyt. Seuraavaksi esittelen teille luonnosta muutaman esimerkin, joista löytyy Fibonaccin spiraaleja. Fibonaccin spiraaleista puhutaan silloin, kun kuviossa on spiraaleja kumpaankin kiertosuuntaan ja niiden lukumäärät ovat peräkkäiset luvut fibonaccin lukujonosta. Spiraalien kaarevuus noudattaa kultaisen spiraalin kaavaa. (Dunlap, s.128)

1.2.1 Kävyt

Käpy on havupuun emikukinto. Kävyn yksittäiset emikukat ovat asettuneet kierteiseen järjestykseen, joka muodostaa kävyn pintaan spiraalikuvioita. Kävyn siemenet sijaitsevat emikukan tukilehden eli suomun alla. (Tirri ym, s.379)

7. 

Kuvassa on tyypillisiä männyn käpyjä. Kävyn suomut muodostavat kävyn pintaan spiraaleja. Spiraaleja on molempiin suuntiin, myötä- ja vastapäivään. Myötäpäivään spiraaleja on enemmän kuin vastapäivään. Kuvassa on piirretty yhteen käpyyn spiraalit, myötäpäivään kulkevat punaisella ja vastapäivään sinisellä. Spiraaleja on pääsääntöisesti peräkkäisten Fibonaccin lukujonon lukujen verran. Esimerkkikuvassa myötäpäivään spiraaleja on 13 ja vastapäivään 8.

1.2.2 Mykeröt

Mykerö on asterikukille tyypillinen kukintomuoto. Mykerössä kukintapohjaan on kiinnittinyt tiiviisti satoja kukkia, jolloin se näyttää yhdeltä isolta kukalta. Asterikkukkien heimoon kuuluvat esimerkiksi auringonkukka ja päivänkakkara. Tyypillistä mykerökukkaisille on kukan terälehtien yhteenkasvu, jolloin muodostuu joko kielimäinen tai torvimainen teriö. Päivänkakkaralla on kahdenlaisia kukkia kukinnossaan, keskiosassa on pienempiä keltaisia kehräkukkia, joiden teriö on torvimainen kun taas valkoiset laitakukat omaavat kielimäisen teriön. (Tirri ym, s.473).

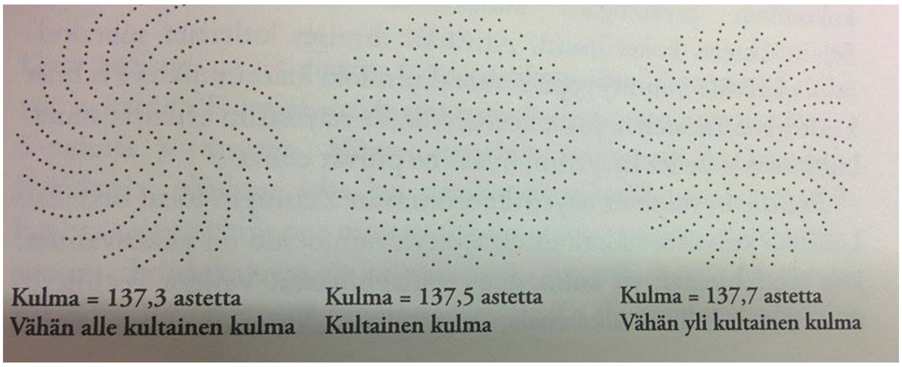
8.

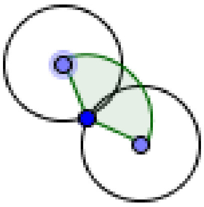
9.


Mykerökukkaisten sadat kukat järjestyvät kukintapohjassa usein spiraalin muotoon. Samoin kuin kävyissä, spiraaleja on sekä myötä- että vastapäivään ja niiden lukumäärät ovat peräkkäiset luvut Fibonaccin lukujonosta. Lukujen suuruus riippuu kukinnon koosta ja yksittäisten kukkien lukumäärästä. Keskikokoisella auringonkukalla spiraalien lukumäärät voivat olla 89 myötäpäivään ja 55 vastapäivään, kun taas isoilla auringonkukilla luvut saattavat olla jopa 144/89. (Dunlap, s.131).

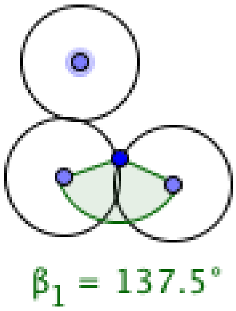
Miten kasvi sitten osaa kasvattaa siemenensä tai kukat kukintapohjaan tällä tavoin? Tähän vastauksena on jälleen kultainen leikkaus. Kukka kasvattaa uuden siemenen aina vanhaan siemeneen nähden kultaisen kulman päähän. Näin ollen uusi siemen työntää vanhaa eteenpäin ja kun siemeniä on lukuisia määriä huomaamme kultaiset spiraalit muodostuneen siemenkuvioon. Kultainen kulma mahdollistaa optimaalisen tilankäytön ja näin ollen siemenet ovat tiivistii kiinni toisissaan. Näin syntyvä järjestys on mahdollisimman tiivis, jolloin organismin rakennelma on vahvempi ja siemenet tiiviisti sidoksissa toisiinsa. (Bellos, s, 298)

Seuraavan kuvan avulla huomataan, kuinka tärkeää on, että kulma on juuri kultainen kulma. Ensimmäinen kuvio on piirretty siten, että siementen välinen kulma on hieman alle kultaisen kulman, keskimmäisessä siemenet noudattavat kultaista kulmaa kasvussaan ja viimeisessä kulma on hieman suurempi kuin kultainen kulma. Ainoastaan keskimmäisessä kuviossa siemenet järjestäytyvät siisteihin spiraalikuvioihin ja täyttävät pinta-alan mahdollisimman tiiviisti. Kuvilla 11 ja 12 yritän havainnollistaa ensimmäisten siementen syntyä ja sitä mihin kultainen kulma muodostuu.

10. 



11.



12.

1.2.3 Nilviäiset

Nilviäiset on yksi eläinkunnan pääjaksoista, johon kuuluvat kotilot, simpukat ja pääjalkaiset. Nilviäiset muodostuvat pääsääntöisesti neljästä rakenteellisesta osasta: päästä, jalasta, sisälmyspussista ja vaipasta. Vaippa on limainen sisälmyspussia peittävä ihopoimu, jonka eritteestä nilviäisille muodostuu usein kuori. Kuoresta voidaan usein havaita spiraalimainen kasvutapa. Eläimen kasvaessa se kasvattaa kuorta, joka kiertyy vanhan ympärille spiraalimaisesti. (Tirri ym, s. 492)

Hyvä esimerkki kierteisestä kasvutavasta on helmiveneet, jotka eivät ole muuttuneet evoluution tuloksena juuri ollenkaan, vaan ovat pysyneet samanalaisina vuosituhansien ajan. Näin niitä voidaankin kutsua eläviksi fossiileiksi. Otetaan tarkkailuun Nautilus pompilius, joka toimii esimerkkinä myös Dunlapin teoksessa Fibonaccin luvuista. Nautilus pompilius kuuluu helmiveneisiin (Nautiloidea), jotka ovat pääjalkaisia, joka on nilviäisten luokka. Tämä laji kasvattaa aina uuden lohkon kuorta vanhan ympärille kiertyen ja sen kuoresta voidaan huomata kasvuvauhdin olevan yhteydessä kultaiseen leikkaukseen. Spiraalin pisteiden etäisyys toisistaan kasvaa kultaisen leikkauksen suhteessa kierrettäessä 90 astetta origon ympäri. Tämä mahdollistaa sen, että jokainen uusi lokero on samanmuotoinen mutta isompi kuin edellinen. Jokaisen lokeron mittasuhteet pysyvät siis samana.(Dunlap, s.135). Kuvassa halkaistu Nautilus pompiliuksen kuori.

13. 

1.3 Kultainen leikkaus

Otetaan jana AB ja jaetaan se kahteen osaan siten, että lyhyemmän osan suhde pidempään osaan on sama kuin pidemmän osan suhde koko janaan (1.). Merkitään janan pidempää osaa x:llä, jolloin lyhyempi osa on $AB - x$.

$$\frac{x}{AB} = \frac{AB - x}{x} \tag{1}$$

$$x^2 = AB(AB - x) \tag{2}$$

$$x^2 - ABx = AB^2 \tag{3}$$

Tätä leikkaus kohtaa kutsutaan kultaiseksi leikkaukseksi. Sille annetaan usein myös numeerinen arvo joka lasketaan janan pidemmän osan suhteena lyhyempään. Lasketaan tämä numeerinen arvo valitsemalla janan pituudeksi 1 (4.).

$$x^2 - x = 1 \tag{4}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \tag{5}$$

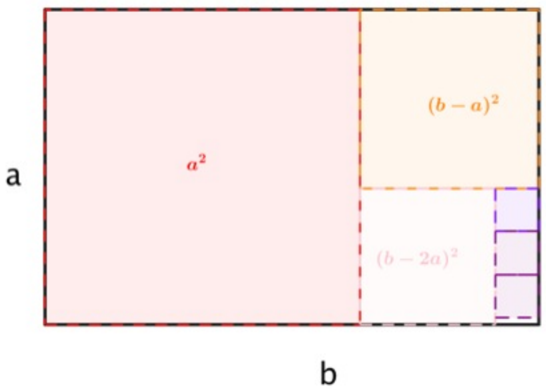
x:n positiivinen juuri on leikkauskohta, joka jakaa yhden yksikön mittaisen janan kultaisessa suhteessa (5.). Lasketaan vielä kultaisen suhteen arvo.

$$\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1,618 \tag{6}$$

Fibonaccin lukujonon peräkkäisten lukujen suhde lähenee kultaista leikkausta. Kultainen leikkaus on kiehtonut ihmisä jo pitkään. Kultaista leikkausta käytetään monissa taiteen aloissa ja sitä pidetäänkin erittäin kauniina. Tästä syystä esimerkiksi rakennuksissa ja maalauksissa asioiden suhteena käytetän kultaista leikkausta. (Dunlap, s.2-4)

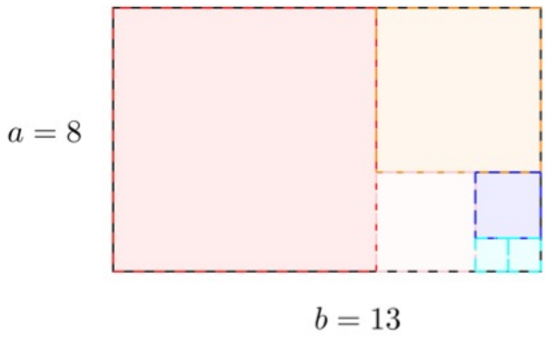
1.3.1 Kultaisen leikkauksen suorakulmio

Piirretään suorakulmio, jonka korkeus on a ja leveys b. Jaetaan se mahdollismman suuriin neliöihin. Aloitetaan piirtämällä suorakulmio ab ja piirretään sen sisälle neliö jonka sivunpituus on a. Tämän jälkeen piirretään mahdollisimman suurella sivun pituudella uusi neliö vanhan viereen ja täytetään näin koko suorakulmio.



14.

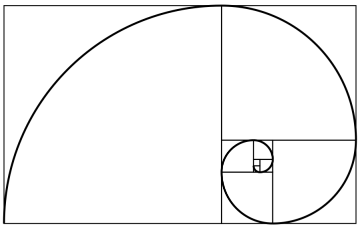
Jos suorakulmion sivujen pituudet ovat Fibonaccin lukujonon peräkkäiset luvut, jokaisesta neliöstä tulee eri kokoinen lukuunottamatta kahta pienintä neliötä. Tälläistä suorakulmiota kutsutaan kultaisen leikkauksen suorakulmioksi.



15.

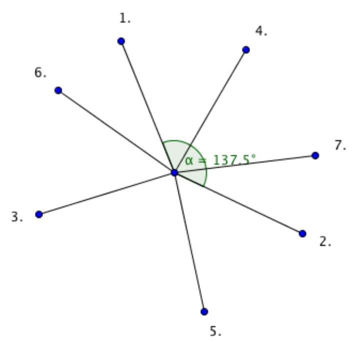
Monet arkipäivän objektit kuten kirjat, laatikot ja muut suorakulmion muotoiset asiat noudattavat kultaista suorakulmiota. Tämä siksi, että ihmissilmä pitää niitä miellyttävänä katsoa ja ne ovat käytännöllisiä. (Vorob'ev, s.61.) Kultaisen suorakulmion sisälle voidaan piirtää spiraali, joka on jo aiemmin mainittu kultainen spiraali. Vertaa kultaista spiraalia jo aiemmin esillä olleen helmiveen kuoreen. Nyt voimme selkeästi huomata yhtäläisyyden kuoren muodon ja kultaisen spiraalin välillä.

16.



1.3.2 Optimoitu tilankäyttö

Ympyrä voidaan jakaa kahten osaan kultaisessa suhteessa. Kun jaetaan ympyrän keskuskulma (360) kultaisella suhteella, saadaan pienemmän kulman suuruudeksi 137,50309... ja tätä kulmaa kutsutaan kultaiseksi kulmaksi. Usein kulman suuruus pyöristetään 137,5 asteeseen. Tarkka kultaisen kulman suuruus on irrationaaliluku, jolloin sitä ei voida esittää murtolukumuodossa. Irrationaalilukuja voidaan toistaa ympyrän kehällä loputtomiin palaamatta koskaan alkuuun. Tästä syystä kasvit kasvattavat aina uuden lehden 137,5 asteen kulmassa edelliseen lehteen nähden. (Bellos, s.296). Tällä kasvutavalla kasvi varmistaa, että uusi lehti ei kasva suoraan edellisten päälle ja maksimoi jokaiseen lehteen osuvan auringonvalon määrän (Dunlap, s.128).



17.

Etsittäessä kuviota, jolla on mahdollisimman suuri pinta-ala, mutta pienin mahdollinen piiri, päädytään ympyrään. Siksi luonnosta löytyy paljon ympyrän muoroisia asioita. Jos ympyröitä ladotaan toistensa päälle, ne asettuvat kahden alimman ympränän väliin. Tälläisessä rakennelmassa jää tilaa kuitenkin hyödyntämättä. Tämä ongelma on ratkaistu monissa organismeissa kuusikulmioilla. Kuusikulmio on hyvin lähellä ympyrän muotoa, jolloin saadaan pienellä piirillä ympäröityä mahdollisimman suuri pinta-ala kuitenkaan hukkaamaatta pinta-alaa kuvioden välissä. Tätä ilmiötä voimme havainnolistaa saippuakuplilla. Puhalletaan pieniä saippuakuplia ja siirretään ne kahden lasilevyn väliin. Huomaamme miten saippuakuplan pallomainen muoto litistyessään omaksuu kuusikulmion muodon. (Weyl, s.103).

1.4 Fraktaalit

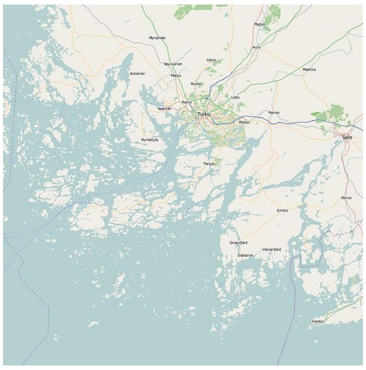
Fraktaali on joukko, joka on itsesimilaarinen. Tämä tarkoittaa sitä, että joukkoa voidaan katsoa millä suurennoksella tahansa ja se näyttää samalta tai samankaltaiselta. Viiva on yksinkertaisin itsesimilaarinen joukko, mutta sitä ei lasketa fraktaaliksi, sillä se voidaan kuvata euklidisella geometrialla. Fraktaalit ovat liian monimutkaisia sillä tavoin kuvattavaksi. (Bunde, Fractals in science, s.1)

1.4.1 Rantaviivaparadoksi

Selkein esimerkki fraktaalien itsesimilaarisuudesta on rantaviivaparadoksi. Voimme ottaa minkä tahansa saaren rantaviivan ja tutkia sitä millä tahansa suurennoksella ja laskea arvion rantaviivan pituudesta. Pituutta voi mitata kartasta tai voimme tutkia rantaviivaa mikroskoopilla luonnossa ja seurata kuinka vesi sekoittuu rannan hiekanjyväsiin ja yrittää mitata rantaviivan pituus millien tarkkuudella. Tarkkaa arvoa emme kuitenkaan pysty laskemaan, jolloin jokaisella mittaajalla on oma arvio rantaviivan pituudesta. (Mandelbrot, Fractal: form, chance, and dimension, s. 27)

Useimmiten esimerkkinä käytetään Iso-Britanniaa, mutta olen ottanut nyt esimerkiksi Suomen ja sen rantaviivan. Suomi ei tietenkään ole saari ja rantaviivaa on vähemmän kuin maarajaa muihin valtioihin, mutta idean saa tästäkin. Ensimmäisessä kuvassa on koko Suomen kartta, josta voidaan arvioida koko Suomen ympärysmitaksi 624070 km. Toisessa kuvassa on Turun alueen karttaa. Siitä nähdään, kuinka paljon tarkemmaksi rantaviiva saadaan ja näin ollen pituutta ympärysmitalle lisää. Viimeisellä kuvalla on tarkoitus havainnollistaa sitä, miten vaikeaa tarkan mittaustuloksen saaminen on, kun vesi sekoittuu rantahiekkaan, 'missä menee tarkka raja?'. Tästä syystä missään ei ikinä mainita maan ympärysmitan pituutta, sillä se ei ole kovinkaan relevantti informaatio. Periaatteessa jokaisen maan, jolla on rantaviivaa, ympärysmitta on ääretön ja näin ollen ympärysmitta ei anna maan koosta järkevää informaatiota.

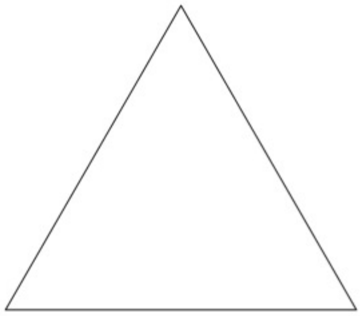
18. 

19. 
20. 

1.4.2 Kochin lumihiutale

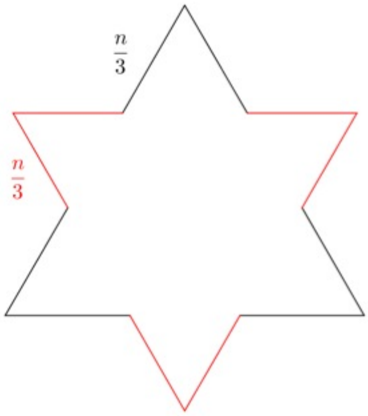
Kochin lumihiutale tai toisin sanottuna Kochin käyrä on yksi ensimmäisistä määritellyistä fraktaalikäyristä.

Käyrän ensimmäinen askel on tasasivuinen kolmio. Yhden sivun pituus on x, ja tämä on iteraation alkuaskel, jolloin $n = 0$. Näin ollen piirin pituus on 3x.



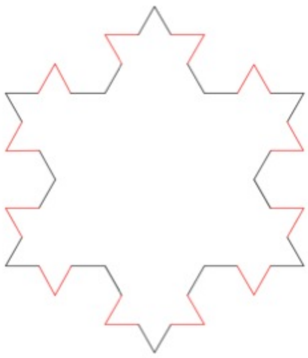
21.

Jaetaan kolmion jokainen sivu kolmeen osaan ja vaihdetaan keskimmäinen osa piikiksi jonka sivut ovat kolmasosan alkuperäisen janan pituudesta. Nyt olemme iteraation ensimmäisessä vaiheessa eli $n = 1$. Yhden sivun pituudeksi tulee nyt $\frac{4}{3}x$ eli koko kuvion piirin pituus on $3 \cdot \frac{4}{3}x$.

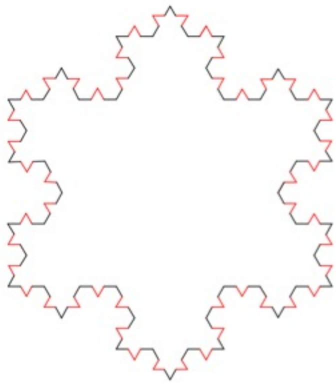


22.

Iteroidaan äskeistä vaihetta äärettömän monta kertaa ja saadaan aikaiseksi Kochin lumihiutale. Kuvion piirin pituus kasvaa joka iteraatiolla ja lähenee ääretöntä. Kuvion pinta-ala ei milloinkaan kasva suuremmaksi kuin alkuperäisen kolmion ympärille piirretyn ympyrän pinta-ala. Saadaan siis äärelliseen alueeseen mahtuva äärettömän pitkä viiva. Seuraavissa kuvissa on esitetty Kochin lumihiutaleen kolmas ja neljäs vaihe.



23.



24.

Kolmannessa vaiheessa $n = 2$, jolloin piirin pituus on $3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 x$ ja neljännessä vaiheessa $n = 3$ ja piirin pituus näin ollen $3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 x$. Tästä saadaankin kaava Kochin lumihiutaleen piirin laskemiseksi. $3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n x$, jossa n on iteraation lukumäärä ja x alkuperäisen kolmion sivun pituus. Kun n kasvaa rajatta, niin myös piirin pituus kasvaa rajatta.

2 Matematiikan ja biologian integraatio yläkoulun opetuksessa

Tässä luvussa käyn yläkoulun opetussuunnitelmaa läpi ja esittelen tapoja yhdistää matematiikan ja biologian opetusta. Tutkin aihetta matematiikan opetussuunnitelman pohjalta ja pyrin luomaan opetuspaketteja matematiikan opettamiseen biologian avulla. Tarkoituksena on, että kokonaisuuksia voi käyttää sellaisenaan oppitunneilla tai niistä voi kerätä omaan opetukseen mieleiset tehtävät. Suurin osa opetustuokioista voidaan järjestää luokkahuoneessa tai ulkona, jossa käytettävä materiaali on oppilaan löydettävissä.

2.1 Oppimateriaalin suunnittelu

Ennen itse oppimateriaaliin tutustumista pohdin hieman eheyttämistä opetussunnitelman kannalta. Eheyttämisellä tarkoitetaan useamman kouluaineen yhdistämistä suuremmaksi opetuskokonaisuudeksi. Uusimmassa, 2014 voimaan tulleessa peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa on oma lukunsa eheyttämisestä. Samalla kun käsittelen eheyttävän opetuksen historiaa, pohdin omia kokemuksia opettajana ja oppijana omissa oppilaitoksissani eheyttvän opetuksen kannalta. Tämän jälkeen hypätään eheyttämisen ja integroivan opetuksen tavoitteisiin, miksi olisi hyvä eheyttää? Vasta kun olemme perehtyneet eheyttämisen periaatteisiin ja tavoitteisiin, käyn omien opetustuokioiden kehittelyn kimppuun. Opetustuokioiden on tarkoitus olla monipuolisia ja helposti sovellettavia. Opetustuokioiden tausta-ajatuksena pidän koko ajan matematiikan ja biologian opetuksen eheyttämisen.

2.1.1 Opetuksen eheyttämisen historiaa

Seuraavassa osiossa käytän taustamateriaalina artikkelikokonaisuutta Ehyesti elävä koulu: kohti kokonaisvaltaista oppimista. Tässä kirjassa eri tutkijat ovat käsitelleet kokonaisvaltaista oppimista eri näkökulmista. Teoksen ovat koonneet ja toimittaneet Reijo Laukkanen, Esko Piippo ja Anna Salonen, mutta viittaan tekstissäni ainoastaan kirjasta löytyviin artikkeleihin ja niiden kirjoittajiin. Luettelen kaikki käyttämäni artikkelit lähdeluettelossa teoksen alla.

Eheyttäminen on ollut jo pitkään osana Suomen ja muun maailman opetussuunnitelmia. Alun perin kokonaisopetus on rantautunut Suomeen Saksasta. Jo 1800 luvulla Saksassa oli vahvasti esillä kaksi kokonaisopetuksen suuntausta. Vapaan kokonaisopetuksen suuntaus pyrki täysin luokattomaan ja vapaaseen opetukseen kouluissa. Tuula Raatikaisen artikkelin esimerkkikoulussa kaikki ikäryhmät olivat samassa tilassa ja keskustelivat vapaasti itseään kiinnostavista aiheista. Vapaassa kokonaisopetuksessa panostettiin ryhmäkeskusteluihin ja opetuksen etenemiseen lasten ehdoilla. Kun oppilaat olivat löytäneet mielenkiinnon kohteita, tartuttiin niihin eri aineiden opetuksessa, jolloin lapset jaettiin ikäryhmiin. Ongelmalliseksi tässä koettiin se, etteivät opettajat pysty valmistautumaan oppilaiden kysymyksiin ja ennakoimaan mitenkään opetuksen suuntaa. Positiivisena nähtiin eri ikäisten lasten yhdessäolo ja sen tuoma keskustelu. Tavoitteena oli pyrkiä tyydyttämään lapsen tietämyksen halua. (Raatikainen, s.17).

Toinen suuntaus oli sidottu kokonaisopetus. Tämä muoto tarkoitti sitä, että kaikki työskentely rakentuu yhteen asiakokonaisuuteen kerrallaan. Aiheena voi olla esimerkiksi kello, jolloin sitä käsitellään laskennossa, äidinkielessä, laulussa yms. Opetus perustuu opettajan suunnittelemaan viikkoon ja lukuvuoteen. Opettaja ryhmittelee oppiaineksen sillä tavalla, että kaikki opetus liittyy ennalta sovittuun aiheeseen. Teemat otettiin lapsen lähimmästä ympäristöstä, jolloin opetus vetosi lapsiin paremmin kuin aiempi opetustyyli. (Raatikainen s.19).

Suomessa opetuksen eheyttäminen on tuttua jo kansakoulusta alkaen. Alkuopetuksessa eheytystä on toteutettu yleisopetuksena ja kokonaisopetuksena. Edelleenkin esikoulut pohjautuvat kokonaisopetukseen. Pitkin historiaa on kokeiltu erilaisia tapoja harjoittaa opetuksen eheyttämistä suomalaisissa kouluissa, mutta silti tälläkin hetkellä vallitseva opetusmuoto ei toteuta kokonaisopetusta edes pienissä määrin. Alakouluissa jäänteenä kokonaisopetuksesta on ainoastaan ympäristöoppi, jossa on yhdistetty aihealueittain maantieto ja biologia. Näitä aiheita pyritään käsittelemään monelta kannalta havainto-opetuksen avulla. (Raatikainen, s.20)

Opetus on täysin ainejakoista suurimmassa osassa Suomen kouluista. On hieman vaikea ymmärtää miksi, kun opetuksen eheyttämistä on harjoitettu jo niin kauan Suomessa. Koulumaailma erkanee koko ajan lasten muusta elämästä, jolloin opetus ei aja tarkoitustaan. Toki ymmärrän, että opetettavan aineksen määrä on lisääntynyt yleisen tietämyksen lisääntyessä ja näin ollen vapaa kokonaisopetus muuttuu koko ajan mahdottomammaksi opetustyyliksi. Alakoulussa kuitenkin sidottu kokonaisopetus mielestäni toimisi edelleen hyvin. Jos alakoulussa lapset tottuvat itse keskustelemaan ja linkittämään kaiken oppimansa muuhun elämäänsä, ei yläkoulussa vaikeampien asioidenkaan ymmärtämisen kanssa tulisi ongelmia.

Raatikainen käsitellee artikkelissaan Eheyttämisen historiaa Aukusti Salon opetussuunnitelmia. Salon sidotussa kokonaisopetuksessa ei luovuttu lainkaan ainejaosta, mutta ne assosioituivat ja sulautuivat limittäin rinnastettuina. Artikkelissakin todetaan, ettei samanlainen kokonaisopetus ylemmillä luokilla enää toimi, sillä se ei enää toisi tarpeeksi uutta ja mielenkiintoista oppilaille. Kuten Raatikainenkin toteaa, kokonaisopetus on rikastus alemmilla luokilla mutta köyhdyttäjä ylemmillä. Kuitenkin mielestäni kokonaisopetusta pitäisi tuoda jollain tapaa yläkouluun ja ylemmille luokille. Siksi pyrinkin suunnittelemaan sellaisia opetustuokiota, jotka antaisivat oppilaille mahdollisuuden linkittää opittuja asioita omaan ympäristöönsä ja herätellä mielenkiintoa asioihin. Toki keskityn tutkielmassani ainoastaan biologian ja matematiikan linkittämiseen, mutta näihin aiheisiin pystyisi helposti yhdistämään myös esimerkiksi historiaa, musiikkia ja kuvaamataitoa.

2.1.2 Opetussuunnitelma ja eheyttäminen

Opetuksen eheyttäminen on tärkeä osa yläkolun opetussuunnitelmaa. Eheyttämistä voidaan järjestää teemapäivien avulla tai osana kiinteää opetusta. Eheyttämisen tarkoitus on antaa oppijalle valmiuksia soveltaa oppimaansa tietoa ja käyttämään kaikkea opittua osana omaa elämää. Eheyttäminen auttaa oppijaa ymmärtämään koulussa opittujen asioiden merkityksen omassa elämässä ja yhteiskunnassa. Tavoitteena on vastata kysymykseen: 'mihin mä tätä tarviin?'. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014 antaa seuraavanlaiset ohjeet eheyttämisen toteutukseen peruskouluissa:

- Kahden tai useamman oppiaineen rinnastaminen, eli molemmissa oppiaineissa opiskellaan samaa teemaa samanaikaisesti.
- Järjestelemällä samaan teemaan liittyvät asiat peräkkäin opiskeltaviksi
- Toiminnalliset aktiviteetit, kuten teemapäivät, tapahtumat, leirikoulu ja opintokäynnit
- Monialaiset oppimiskokonaisuudet, joiden toteuttamiseen voidaan sisällyttää edellä mainittuja eheyttämistapoja
- Muodostamalla oppiaineista integroituja kokonaisuuksia
- Kokonaisopetuksena, jossa kaikki opetus toteutetaan eheytettynä kuten esiopetuksessa

Pyrin tutkielmassani löytämään mahdollisuuksia matematiikan ja biologian eheyttämiseen. Tutkielmani keskittyy lähinnä rinnastamiseen ja toiminnallisiin aktiviteetteihin. Toki suunnitelemiani opetustuokioita voi käyttää osana kokonaisopetusta tai integroitua opetuskokonaisuutta.

Opetussuunnitelman perusteiden mukaan opetuksen järjestäjän tulee huolehtia, että oppijalla on vähintään yksi monialainen opetuskokonaisuus lukuvuodessa. Tämä oman havaintoni mukaan järjestetään usein teemapäivänä tai muuna kertaluontoisena asiana. Opetussuunnitelma kuitenkin huomauttaa, että monialaisen opetuksen tulisi olla järjestetty riittävän pitkäkestoisena, jotta oppijalle jää aikaa syventyä oppikokonaisuuden sisältöön ja työskennellä tavoitteellisesti, monipuolisesti ja pitkäjänteisesti. Eheytyksen tulisi siis olla jatkuvaa ja osana koulujen arkea, eikä vain yksittäisiä teempäiviä siellä täällä. Pahimmassa tapauksessa opetuksen järjestäjä ylittää aidan matalimmasta kohdasta järjestämällä yhden koko oppilaitoksen yhteisen teemapäivän monialaisuudesta. Tälläisessä teemapäivässä ei varsinaisesti ole mitään vikaa, mutta oppijalle jää helposti irralliseksi päivän tarkoitus ja yhteys muuhun opetukseen. Eheyttämisen pohjimmainen ajatus on kuitenkin yhdistää opetus muuhun elämään ja yhteiskuntaan, antaa tarkoitus opituille asioille.

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa eheyttäminen linkitetään vahvasti toimintakulttuuriin, jonka opetuksen järjestäjä luo. Toimintakulttuurin perusteiden tavoitteena on tukea ja antaa suuntaan toimintakulttuurin luomiseen peruskouluissa. Toimintakulttuuri ilmenee parhaiten oppilaitoksen käytännöissä. Opetuksen järjestäjän tulee tehdä yhteistyötä muiden vuosiluokkien opetuksen järjestäjien kanssa, jotta voidaan taata eheä ja kasvatuksellisesti johdonmukainen jatkumo koko peruskoulun läpi. Jos opetuksen järjestäjä sisällyttää oman oppilaitoksensa toimintakulttuuriin eheyttämisen on opettajien helpompi lähteä sitä toteuttamaan jokapäiväisessä työssään. Opetuksen järjestäjien tulee myös keskustella toimintakulttuurista ja tietoisesti pyrkiä ohjamaan sitä haluttuun suuntaan, jotta voidaan välttyä sen ei-toivotuilta vaikutuksilta. Eheyttämisen integrointi toimivaan toimintakulttuuriin tuo opettajalle lisämahdollisuuksia eheyttämisen toteutukseen. Jos siis koulussa yleinen ilmapiiri on eheyttämisen kannalla ja sitä toteutetaan jatkuvasti, tulee siitä oppilaalle normaalia ja näin ollen sen hyvät puolet pääsevät parhaiten esille. Oppijaa ei siis aseteta joka kerta uuteen tilanteeseen kun kahta tai useampaa oppiainetta yhdistellään ja näin ollen opetuksen yhteys muuhun elämään on selkeämpää.

2.1.3 Tutkimustuloksia integroivasta opetuksesta

Eheyttävää opetusta on tutkittu yllättävän vähän siihen verrattuna, että se on ollut pinnalla opetuksen yhteydessä jo vuosikymmenten ajan. Löysin artikkeleita eheyttävän opetuksen kokeiluista 1980-luvulta, joka kielii siitä, että eheyttävä opettaminen ei ole mikään uusi juttu. Tutkimukset ja kokeilut, joita löysin, ovat hyvinkin erityyppisiä ja eritasoisille opiskelijoille tehtyjä. Tämä tuo vertailuongleman, mutta pyrin etsimään tutkimuksista tärkeimmät ideat juuri omaa työtäni ajatellen. Koska tutkimuksia on tehty vähän, yritin valita niistä sellaisia, jotka pystyn linkittämään omaan työhöni jollakin tavalla. Ensimmäisessä yhdistävä tekijä on luokka-asteen lisäki kokonaisvaltainen eheyttäminen, jota myös sivuan omassa työssäni. Niemen tutkimus peilaa omia ajatuksiani eheyttämisestä hyvinkin vahvasti ja näin ollen halusin tuoda sen esille. Viimeinen tutkimus on matematiikan eheyttämistä, jolla saan nidottua kaikki työni aiheet tutkimustulosten pohjalta yhteen.

Teppanan koulussa toteutettiin vuonna 1984 kokonaisopetuskokeilu koko peruskoulun ryhmille. Kokeilussa opettajat ensin suunnittelivat luokka-asteen oppiaineksesta viikkoteemat ja aihekokonaisuudet. Tämän jälkeen opettajat kokoontuivat viikoittaisessa palaverissa suunnittelemaan teeman keskeisen sisällön ja siihen liittyvän oppimistyön pääpiirteet. Viikon aikana ei siis nähty selvää oppiainejakoa, vaan kaikki opetettava aines liittyi viikon teemaan. Opettamista pohdittiin siltä kannalta, että miten saan tämän teeman avulla opetettua tietyt asiat. Ne oppiaineet, joita ei saatu liitettyä viikon teemaan, kulkivat mukana omana oppiaineksena. Kyseinen kokeilu oli onnistunut ja oppilaiden vanhemmiltakin saatu palaute oli pääosin myönteistä. Kokeilussa pyrittiin ottamaan oppilaiden vanhemmat mukaan jo teemojen suunnitteluvaiheessa ja heidän kanssa pidettiin vuoden aikana yhteisiä kerhoja. (Piippo, s. 123)

Kokeilun pääajatuksena oli avoin työyhteisö ja oppiaineista irtautuminen. Opettajat pääsivät yhdessä suunnittelemaan teemoja, joka toi mukanaan myös haasteita. Opettajien oli luovuttava omasta olen aina oikeassa -asenteesta, mutta yhteistyössä huomattiin suurempi voima kuin yksin suunnitelluissa oppitunneissa. Oppiaines pystyttiin linkittämään helpommin ympäristöön viikon teeman avulla ja näin ollen oppilaille jäi kokonaiskäsitys opitusta teemasta, eikä irtonaisia tiedonjyviä eri oppiaineista.(Piippo, s.124)

Samankaltaisia kokeiluja on tehty alakouluissa paljon ja mielestäni eheyttävä opetus onkin saatu juurrutettua alakoulun opetukseen kohtalaisen hyvin. Tämänhetkinen opetus alakouluissa on kuitenkin yhden opettajan varassa. Sama opettaja opettaa suurimman osan aineista yksin samalle luokalle usean vuoden ajan. Tämä jättää kaiken vastuun muutaman opettajan harteille, joka heijastuu yläkouluun oppilaiden lähtötasoissa. Yläkoulussa tälläisiä kokeiluja ei Teppanan koulun kokeilun lisäksi juurikaan löydy, vaikka tulokset tässäkin kokeilussa olivat hyviä ja nämä opettajat ovat levittäneet erilaisissa konferenseissa omia kokemuksiaan muille opettajille. Jotta tälläisiin koko koulun yhdistäviin teemoihin päästäisiin, tulee muutoksen lähteä rehtorista, joka mahdollistaa opettajilleen tälläisen opetustyylin. Yksittäisen opettajan on vaikea muuttaa koko koulun systeemiä, jollei muu työyhteisö ole tässä tukena.

Reetta Niemi on tutkinut väitöskirjassaan, 'Onks tavallinen koe, vai sellanen mis pitää miettiä?', terveystiedon eheyttävää opetusta. Väitöskirja on kirjoitettu 2009, joten tutkimus sijoittuu lähihistoriaan, toisin kuin Teppanan koulun kokeilu. Tutkimuksessaan Niemi antaa konkreettisia välineitä terveystiedon eheyttämiseksi koulumaailmaan ja hän haluaakin työn voivan sellaisenaan auttaa opettajia koulutyössään. Niemi on itse ammatiltaan opettaja ja pohjaa työnsä pitkälti omiin kokemuksiin opettajana. Työssään Niemi pohtii samoja ongelmia, mitä Teppanan koulun kokeilussa jo tuli ilmi. Opetustyö nähdään Niemen mukaan sarjana suorituksia ja opetussisältöjä. Yleinen käsitys opettajan työstä on toimia tiedon siirtäjänä oppilaille ja opettajan suoriutuminen tehtävissään yleisesti ajatellenaakin sen kautta, kuinka hyvin hän on tiedon saanut välitettyä oppilailleen.

Niemi pyrkii tutkimuksessaan luomaan käytännön tietoa kouluille, sekä opettajankoulutuslaitokseen siitä, miten käytännön opetustoiminta voi perustua yksittäisten teemapäivien sijasta läpi lukuvuoden toteutuvaan eheytykseen. Hänen käyttämät menetelmät auttavat oppilaita oppimaan, mutta myös ajattelemaan ja kehittymään yhteiskunnan jäseninä. Tärkein Niemen työn tulos on mielestäni kuitenkin opettajan oma innostus opetettavaan ainekseen. Työssään hän kertoo saaneensa palautetta oppilaiden vanhemmilta siitä, miten opettajan innostus on tarttunut oppilaisiin ja näin ollen saanut oppilaat tutkimaan itse heitä kiinnostavia asioita. Mielestäni tämä on oikea lähtökohta opettajan työlle: oman innostuksen näyttäminen ja sillä tavoin leviävä oppilaiden innostus opetettuihin asioihin.

Viimeiseksi esittelemäni tutkimus liittyy suoraan matematiikan eheyttämiseen. Rintala tutkii pro gradu -työssään kolmiulotteisuuden hahmottamisen vaikeuksia ja tapoja integroida kuvataide kyseisen teeman avulla matematiikan opetukseen. Työssään hän luo materiaalin, jota opettajat voivat vapaasti lainata tai soveltaa omiin käyttötarkoituksiin. Työssä on tarkat ohjeet materiaalin käyttöön ja tehtävien tekemiseen. Materiaali on suunniteltu koko ajan silmällä pitäen eheyttämistä ja varottu tiedon pirstaloitumista. Materiaali osoittaa mahdollisuuden eheyttämiseen kokonaisuuden avulla. Kolmiuloitteisuuden hahmottamiskyvyllä on paljon positiivia vaikutuksia oppimiseen (Rintala, s.50) ja materiaalin avulla voidaan kehittää erilaisten oppijoiden hahmotuskykyä.

Tälläiset Rintalan työn kaltaiset yksittäiset kokonaisuudet auttavat opettajia hahmottamaan miten eheyttämistä voidaan toteuttaa. Kokonaisvaltainen eheyttäminen on vain yksi tapa toimia. Yksittäisen opettajan on helpompi eheyttää omalla tavallaan omissa opetettavissa aineissa tälläisten kokonaisuuksien avulla, sillä kokonaisopetuksen järjestämiseen tarvitaan koko työyhteisön osallistuminen, kuten jo Teppanan koulun kokeilun yhteydessä totesin.

2.1.4 Integroivan opetuksen tavoitteet opetustuokioissa

Kuten olen jo todennut, että yläkoulussa ei ole mahdollista siirtyä täysin kokonaisvaltaiseen opetukseen, joten pyrin suunnittelemaan opetustuokioita, joiden avulla voidaan toteuttaa opetuksen eheyttämistä kahden aineen välillä ainejakoisessa opetuksessa. Ylipäänsä matematiikassa eheyttämistä on helppo toteuttaa suunnittelemalla tunneilla ja kotona tehtävät harjoitukset koskettamaan oppilaiden elämää. Otetaan esimerkkejä heidän lähiympäristöstään ja näin ollen tehdään matematiikasta mielenkiintoisempaa ja helpommin lähestyttävää. Tuomalla oppitunneille mukaan keskustelevan ilmapiirin saamme oppilaille enemmän oivaltamisen iloa, joka on tärkeää uuden oppimisessa.

Oman opetuksen suunnitteluun tulisi ottaa enemmän mukaan oppilaiden kiinnostuksen kohteita. Tämä onnistuu sillä tavalla, että kyselee oppilailta heidän harrastuksistaan ja muista kiinnostuksen kohteista. Toki opetuksen suunnitteluun tulee opettajalle hurjasti lisätyötä, etsiessään ja selvittäessään, miten näitä voisi hyödyntää omassa opetuksessa. Samalla tunnilla ei tietenkään tarvitse käsitellä kaikkien harrastuksiin liittyviä asioita, vaan pitkin vuotta ottaisi esimerkkejä oppilaiden kiinnostuksen kohteista. Samalla saadaan ehkä herätettyä oppilaan mielenkiinto sekä opetettavaan aineeseen että jonkun muun oppilaan harrastukseen. Tähän voisi liittää vielä ajatuksen siitä, että kyseinen oppilas saisi esitellä omaa mielenkiinnon kohdettaan tunnin alussa tai lopussa.

Koska opetuksen eheyttämisen kenttä on niin laaja ja sen toteuttamiseen tarvitaan jokaisen opettajan panos koulussa, on minunkaan turha lähteä pohtimaan tutkielmassani laajempaa integrointia oppiaineiden välillä. Tästä syystä olen valinnut kohteiksi omat opetettavat aineeni. Lisäksi tarkensin opetustuokioiden aiheet vielä luontoon ja geometriaan. Kouluaineista matematiikka helpoiten mielletään vaikeaksi ja täysin irralliseksi muusta elämästä. Usein opettaja kuuleekin kysymyksen 'mihin mä tätä tarviin?'. Tämän takia matematiikka pitäisi tuoda lähemmäksi oppilaita ja antaa mahdollisuuksia oppia monella eri tavalla. Suunnittelemien opetustuokioiden tavoitteena on vastata tähän haasteeseen ja auttaa oppilaita ymmärtämään mihin sitä matematiikkaa voikaan tarvita ja missä kaikkialla matematiikkaa esiintyy.

2.2 Oppimateriaalin sisältö

Seuraava osio koostuu suunnittelemistani opetustuokioista. Olen luokitellut opetustuokiot teemoihin. Esittelen ensin opetustuokion kulun ja ohjeet tehtävien tekoon, tämän jälkeen avaan hieman suunnittelemiani tehtäviä ja niiden tarkoitusperiä. Pelkät opetustuokiot löytyvät myös liitteistä opetuspakettina. Jokaisen opetustuokion alussa on pieni pohjustus siitä minkälaisia asioita olisi mielestäni hyvä käydä läpi oppilaiden kanssa ennen näihin tehtäviin siirtymistä vai sopiiko tehtävä aiheen perehdytykseen ja alustukseen sellaisenaan.

Pyrin käyttämään mahdollisimman paljon erilaisia opetustekniikoita, jotta oppilaat ymmärtävät erilaisten oppimistekniikoiden mahdollisuudet. Oppimistekniikoita voi siis vaihdella tehtävien välillä. Oppimistekniikoilla tarkoitan tässä erilaisia ryhmätyöskentelyn muotoja, tutkivaa oppimista ja muita menetelmiä, joita opettaja voi työssään käyttää monipuolistuttamaan omaa opetustaan.

Kaikkia työhöni tekemiä materiaaleja saa vapaasti käyttää ja muokata mieleisikseen. Tästä syystä olen pyrkinyt jakamaan kaiken mahdollisen internetissä, jotta se olisi helposti kaikkien saatavilla. Olen myös lisännyt materiaaliini tietoa mistä löytyy muiden tekemää lisämateriaalia samasta aiheesta, jolloin jokainen voi koota kaikesta tästä materiaalista helposti itselleen mieleisen. Työni tarkoitus on antaa esimerkkejä integraation toteutuksesta, eikä luoda kattavaa tietopankkia aiheesta.

2.2.1 Mehiläisten matematiikkaa

Kokonaisuus on suunniteltu kestäväksi 75 minuuttia. Voidaan toteuttaa myös kahdessa 45 minuutin oppitunnissa tai vain osia yksittäisinä tehätävinä osana muuta opetusta.

Symmetrian käsite
Aika: 15 min
Työtapa: Yksilötyöskentely, joko tunnin alussa tai kotitehtävänä
Tehtävä: Etsikää ympäriltänne muotoja jotka ovat symmetrisiä ja keskenään symmetrisiä. Ottakaa niistä kuvia, piirtäkää tai kirjoittakaa ylös mitä löysitte.
Tavoitteet: Hahmottaa symmetrisyyden käsite, ymmärtää milloin kuvio on symmetrinen ja mitä tarkoittaa, jos kaksi kuviota ovat symmetrisiä keskenään. Antaa opettajalle tietoa oppilaiden lähtötasosta.
Taustamateriaali: Luku 2.1 Symmetria
Esitiedot: Symmetrian käsite ja perussymmetriat

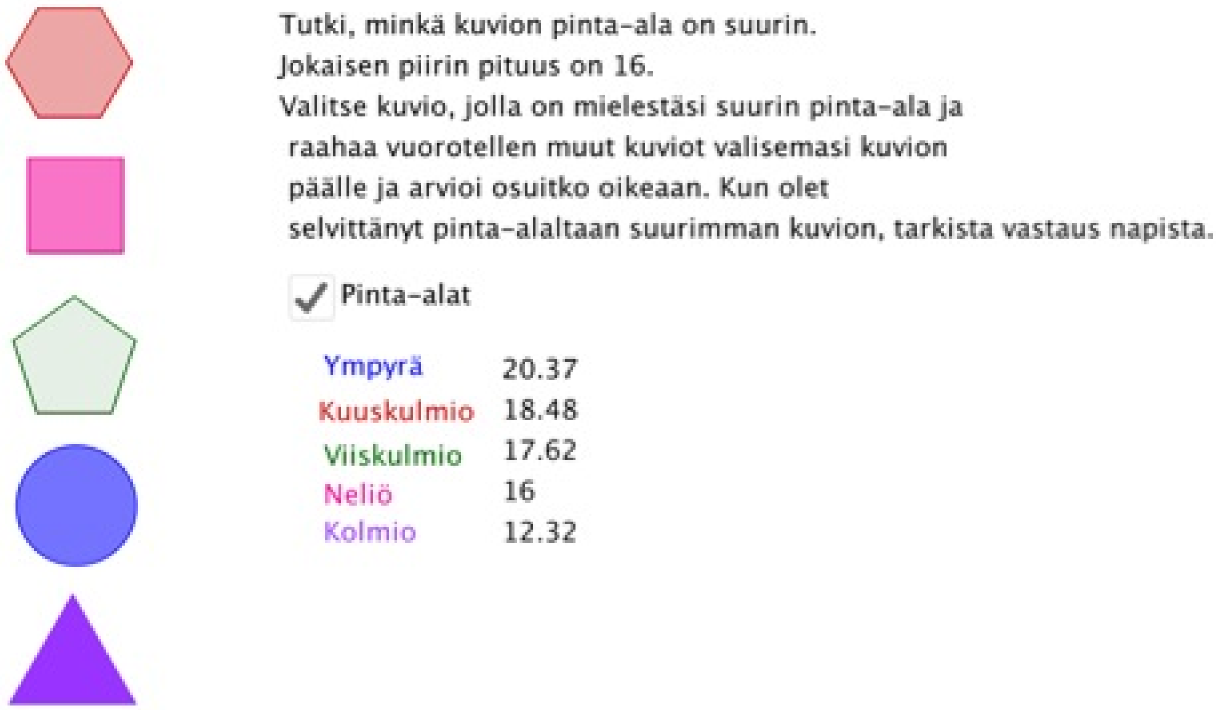
Tehtävän voi antaa kotona tehtäväksi, jolloin se käsitellään seuraavan tunnin alussa. Tätä ennen on hyvä ollut käsitellä symmetrian käsite. Tehtävän ideana on saada oppilaat kiinnittämään huomiota ympäristöön ja näkemään asiat uudella tavalla. Tehtävä voidaan myös tehdä tunnin alussa, jolloin oppilaat herätellään matematiikan maailmaan ja uuteen aiheeseen. Löydetyt symmetriat käydään ensin pareittain tai pienissä ryhmissä läpi. Listataan millaisia symmetrioita löytyi; heijastus, kierto vai siirto? Katsotaan koko luokan kesken muutama esimerkki jokaisesta erilaisesta symmetriasta. Tehtävässä harjoitellaan havainnoinnin lisäksi ryhmätyötaitoja.

Tehtävässä oppilaat huomaavat, että epäsymmetriset muodot voivat silti olla symmetrisiä keskenään. Pohditaan millaisista paikoista löytyi mitäkin symmetriaa. Eläinkunnasta löytyy paljon kaksikylkisymmetriaa, joka kuuluu heijastussymmetriaan. Tällöin eläimen oikea ja vasen puoli ovat peilikuvia toisistaan. Kasvikunnasta löytyy paljon esimerkkejä kiertosymmetriasta, sillä useimmat kukat ovat säteittäissymmetrisiä. Opettajan tulee olla tarkka käyttäessään toisistaan poikkeavia käsitteitä. Jos biologian opettaja puhuu kaksikylkisymmetriasta ja matematiikan opettaja heijastussymetriasta, eivät käsitteet välttämättä kohtaa.

Pinta-alan ja piirin suhde
Aika: 30min
Työtapa: Ryhmätyöskentely
Tehtävä: Tutkitaan erilaisten kappaleiden piirin ja pinta-alan suhdetta.
Tarvikkeet: Erilaisia kappaleita, purkkeja, renkaita, palikoita ja muita esineitä, joista on helppo mitata pohjan piiri ja pinta-ala. Mittanauha ja tehtävämoniste.
Tavoitteet: Harjoitella tutkivaa oppimista, ymmärtää optimoidun tilankäytön idea. Piirin ja pinta-alan kertaaminen.
Taustamateriaali: Luku 2.3.2 Optimoitu tilankäyttö, Geogebra-tehtävä löytyy osoitteesta: http://tube.geogebra.org/material/simple/id/1818137
Esitiedot: Piirin ja pinta-alan laskeminen erimuotoisista kappaleista

Oppilaat mittaavat pareittain kappaleen piirin pituuden ja merkitsevät sen monisteeseen, samoin laskevat pohjan pinta-alan. Ennen tehtävän tekoa on hyvä kerrata, miten pinta-ala laskettiinkaan erilaisista kappaleista. Opettajan on hyvä valita parille muutama erimuotoinen kappale, joiden piirin pituus on sama. Tehtävän tarkoitus on kokeilemalla etsiä muoto, jolloin pinta-ala on suurin tietyllä piirin pituudella. Kun pari on tehnyt oman hypoteesin aiheesta, voivat he tutkia sen paikkansa pitävyyttä keksityillä mitoilla. Päteekö sama kaikilla piirin pituuksilla? Tehtävässä oppilaat pääsevät harjoittamaan toiminnallista työskentelyä, tutkimaan itse ja harjoittamaan parityöskentelytaitoja. Kun ollaan yhdessä tultu siihen tulokseen, että ympyrä sulkee sisäänsä suurimman pinta-alan pienimmällä piirillä, pohditaan mistä kaikkialta luonnosta löytyy ympyröitä, löydetään ympyröitä esimerkiksi kukista. Onko näillä jokin yhteys? Pohditaan taloudellisuutta kukan kasvussa. Kukalle on taloudellisinta kasvattaa esimerkiksi varsi siten, että mahdollisimman pienellä ympäryksellä saadaan sisälle kaikki tarvittavat rakenteet. Kukka tarvitsee kasvaakseen energiaa ja mitä isomman rakenteen se kasvattaa, sitä enemmän tarvitaan energiaa.

Tehtävän haasteena on löytää tarpeeksi monta tarpeeksi yksinkertaista muotoa, joista oppilas pystyy laskemaan pinta-alan. Jos mukaan halutaan kappaleita, joiden pohjan pinta-alan laskeminen oppilaan taidolla on liian haastavaa, voidaan tehtävä toteuttaa siten, että oppilas etsii mittanauhan avulla kappaleet, joissa on yhtäsuuri piiri ja tämän jälkeen piirtää paperille pohjan ja leikkaa sen irti. Nyt oppilaan on helppo silmämääräisesti verrata irtileikattuja pinta-aloja. Tätä tehtävää havainnolistaa jos jokainen pohja leikataan erivärisestä paperista. Samoin, jos tehtävä halutaan pitää lyhyenä ja havainnollistavana, loin aiheesta Geogebra-appletin. Seuraavalla sivulla on kuva tehtävästä, jonka ideana on, että oppilas ensin valitsee kuvion, jolla on mielestään isoin pinta-ala. Tämän jälkeen hän raahaa muut kuviot vuorotellen alkuperäisen päälle ja tarkastelee, onko kuvio isompi vai pienempi kuin alkuperäinen. Kun oppilas on löytänyt kuvion, jossa on mielestään isoin pinta-ala, voi hän tarkistaa vastauksen nappia painamalla. Vastauksessa on laskettu jokaisen kuvion pinta-ala valmiiksi.



25.

Geogebra-tehtävä sopii sellaisiin tilanteisiin, joissa oppilas ei välttämättä vielä osaa laskea pinta-alaa tai tehtävää käytetään vain havainnolistamaan piirin ja pinta-alan suhdetta. Palikkaversiossa oppilas joutuu itse laskemaan pinta-alat, jolloin myös laskupuoli harjaantuu, mutta altistuu myös suuremmalle virhemarginaalille. Geogebra-tehtävä sai ystävissäni hyvinkin positiivisen reaktion, kun esittelin sitä heille. Heidän mielestään tehtävä on havainnollistava ja selkeä. Palikkatehtävässä oppilas pääsee itse kokeilemaan ja todistamaan. Oppilaan on helpompi ymmärtää muuten ehkä vaikeasti hahmotettava asia, kun sen on itse todistanut, tämä myös kehittää oppilaan loogista ajattelua.

Ryhmätyö mehiläisistä
Aika: 45min
Työtapa: Ryhmätyöskentely, 3:lla jaollinen määrä ryhmiä, optimi ryhmäkoko 2-3 oppilasta
Tehtävä: Etsi tietoa omasta aiheesta, tee siitä lyhyt selostus ja yhdistäkää tietonne kahden muun ryhmän kanssa. Koostakaa yhteenveto.
Aiheet:
1. Mehiläsipesän toiminta; miten mehiläispesä toimii?
2. Mehiläispesän rakenne; millaisia rakenteita pesästä löytyy?
3. Mehiläispopulaatio ja lisääntyminen; mitä erilaisia tehtäviä mehiläisillä on?

Ryhmän tarkoitus on etsiä tietoa omasta aiheesta, kirjoja ja internetiä hyväksi käyttäen. Ajatuksena on koota lyhyt katsaus mehiläispesän toimintaan. Tiedon etsintään on aikaa 30 minuuttia, tämän jälkeen kootaan isompia ryhmiä, joissa jokaisessa on yksi jokaisen eri aiheen ryhmä. Nyt siis ryhmäkoko on noin 6-9. Näissä ryhmissä oppilaiden olisi tarkoitus käydä läpi etsimänsä tieto ja koostaa siitä lyhyt tiivistelmä. Kun kaikki isommat ryhmät ovat valmiit, käydään yhdessä läpi, mitä oppilaat ovat löytäneet ja pohditaan matematiikan merkitystä mehiläispesässä. Voidaan pohtia myös sitä, että ymmärtävätkö mehiläiset matematiikan ympärillään vai onko kyse vain järkevistä ratkaisuista, joihin on matemaattinen selitys.

Lyhyen ajan vuoksi oppilailta ei edellytetä muuta kuin lyhyt katsaus mehiläispesän toimintaan ja rakenteeseen. Ajatuksena on, että lopputunnista kaikilla on käsitys siitä, millainen yhdyskunta mehiläisillä on ja millaista matematiikkaa sieltä löytyy. Todennäköisesti oppilaat keskittyvät biologian puoleen tehtävässä, jolloin opettajan vastuulle jää tehtävän matemaattinen puoli. On tärkeää, että kaikille tulee selväksi biologian ja matematiikan yhteys tässä tehtävässä. Lopputunnin koonnissa olisi hyvä tulla esiin ainakin seuraavat asiat jokaisesta aiheesta.

1. Mehiläispesän toiminta

Mehiläspesä muodostuu kennoista, jotka rakennetaan vahasta. Vahan mehiläiset tuottavat itse. Kennoilla on jokaisella oma tehtävä kennostossa. Se voi olla joko hunajakenno, jonne hunaja varastoidaan, siitepölykenno, jossa varastoidaan siitepöly ravinnoksi tai siiökenno, jossa haudotaan uusia työläisiä. Kuhnurikennot ovat millin isompia kuin työläisten ja niissä kehittyy kuhnureita. Emonvaihtokennot rakennetaan erikseen kun emon vaihto on ajankohtainen. Emokennossa kehittyy uusi emo ja vaihtokennossa se kasvaa emoksi.

Kennosto toimii myös pesän yhteisenä kemiallisena muistina, sillä sen vahaan tarttuu mehiläisten ominaistuoksu, jolloin työläiset löytävät takaisin omaan pesäänsä. Kennosto toimii myös viestinvälittäjänä, sillä vaha, josta kennosto muodostuu, johtaa värinää, jota mehiläiset käyttävät viesteissään. (Hokkanen H, Mahiläispesä on ihmelaitos)

26.  27. 

Ensimmäisessä kuvassa näkyy kuhnuri- ja työläiskennoja. Kuhnurikennot ovat kooltaan millin suurempia. Kuva 26 havainnolistaa kennojen kokoeroa, ylempänä näkyy työläiskennoja ja kuvan alareunassa kuhnurikennoja. Kuvan kennot eivät ole luonnollisesta mehiläispesästä vaan mehiläistarhurin tarjoamasta pesälaatikosta. Pesälaatikkossa mehiläiset rakentavat kennostot kehikoihin, jotka tarhuri voi nostaa pesästä hunajan linkoamista ja muuta hoitoa varten, näin ollen kennostosta saa kuvia ilman, että tuhoaa luonnollisen pesän. Toinen kuva on otettu pesälaatikon päältä, jossa näkyy kolme kehikkoa ja niiden väleihin rakentunutta kennostoa. Markus Niinikoski on ottanut kuvat tutkielmaani varten omalta tarhaltaan.

2. Mehiläispesän rakenne

Kenno on vahaputkilo, jonka mehiläinen itse tekee. Mehiläinen muodostaa vahaa ympärilleen ja kun vahaa on tarpeeksi, nostaa mehiläinen ruumiinlämpönsä 40 asteeseen, jolloin vaha muuttuu notkeammaksi. Pyörivällä liikkeellä ja vahan ominaisuuksien ansiosta muodostuu putki, joka kapillaarivoimien avulla muotoutuu kuusikulmion muotoon. Kuusikulmioilla taso saadaan jaettua pinta-alataan samankokoisiin alueisiin, joiden reunojen pituus on minimi. Mehiläiset eivät siis välttämättä osaa matematiikkaa kennon muodon takana vaan se muodostuu aivan kuin itsestään ja on joka kerta tasakokoinen. (Hokkanen H, Mehiläspesä on ihmelaitos)

Kennot muodostavat kennoston, jossa on tarkka tehtävä jokaisella kennolla. Kennostoja on niin monta kuin pesäkoloon mahtuu ja kennostojen välissä on 8-10 mm väliä, jotta mehiläiset mahtuvat kulkemaan väleissä. Luonnonpesässä kennosto voi olla jopa viisi neliömetriä laaja ja se roikkuu pystysuunnassa kolon katosta. (Hokkanen H, Mehiläispesä on ihmelaitos).

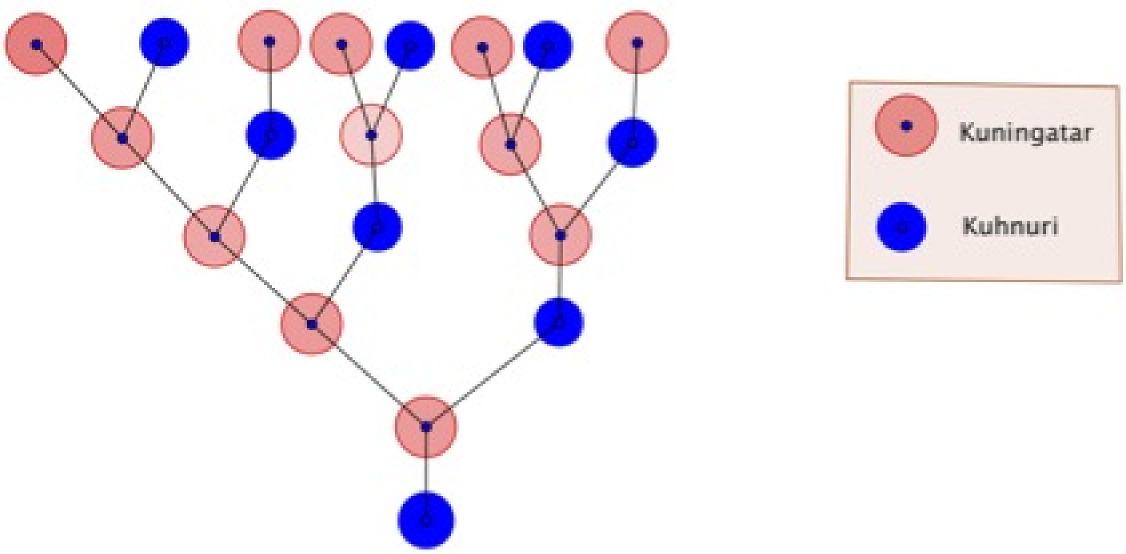
28. 

Tässä kuvassa näkyy yksi kehikko, johon mehiläiset ovat rakentaneet kennoston ja täyttäneet ne hunajalla. Hunajakennot ovat peitetty peittovahalla, joka suojaa ravintoa kosteuden muutoksilta. Hunajassa on oltava tietty kosteusprosentti, jottei se pilaannu. Kehikon alareunassa näkyy kennoja, joita ei ole vielä peitetty.

3. Mehiläispopulaatio ja lisääntyminen

Mehiläispesässä jokaisella mehiläisellä on oma tehtävänsä. Yhdessä pesässä on vain yksi emo, kuningatar, joka tuottaa kaikki pesän muut mehiläiset. Kuningatar lentää vain häälennon, jolloin jonkun toisen pesän kuhnuri parittelee emon kanssa. Kuhnurien ainoa tehtävä on paritella toisen pesän kuningattaren kanssa. Kuningatar pysyttelee muuten pesässään ja työläiset nimensä mukaan hoitavat kaiken työn. Kuningattaria voi olla pesässä kerrallaan vain yksi. Ensimmäiseksi kuoriutunut kuningatar puhkaisee muiden emokennot ja näin ollen jää ainoaksi emoksi pesään. Häälennon lisäksi kuningatar voi lentää silloin, kun on aiheellista vaihtaa pesää. (Hokkanen H, Mehiläispesä on ihmelaitos).

Kuningatar kerää kerralla siittiösäiliönsä täyteen ja munii sieltä parin vuoden ajan uusia munia. Hedelmöittyneet munat munitaan työläiskennoon ja niistä kehittyy uusia työläisiä. Kuhnurikennoon munitaan hedelmöittymätön muna, jolloin kuhnureilla on vain kyseisen pesän kuningattaren geenejä jakaa eteenpäin paritellessaan jonkun muun pesän kuningattaren kanssa.(Hokkanen, Mehiläispesä on ihmelaitos) Mehiläispopulaatio kasvaa siis siten, että kunungatar munii kuhnureita ja työläisiä joista kuhnuri parittelee kuningattaren kanssa, joka jälleen munii lisääntymiskyvyttömiä työläisiä, sekä kuhnureita. Alla on esitetty kuhnurin sukupuu, jossa esiintyy Fibonaccin lukujono samalla tavalla kuin pupuesimerkissä.



29.

Kuhnurilla on vain emo, sillä se on haploidinen yksilö. Kuningattarella on isänä kuhnuri ja emona kuningatar. Tämä aiheuttaa sen, että kuhnurin sukupuu kasvaa Fibonaccin lukujonon mukaisesti, kuten kaaviosta huomataan. Haploidinen yksilö tarkoitta sitä, että yksilöllä on vain yksinkertainen kromosomisto, tässä tapauksessa vain kuningattaren kromosomit. Diploidisella yksilöllä tarkoitetaan yksilöä, jolla on kaksinkertainen kromosomisto, eli yksi jokaista kromosomia kummaltakin vanhemmalta.

Mehiläisten populaatio ja lisääntyminen ovat ainutlaatuisia eläinkunnassa. Ainoastaan yhdyskunnissa elävät eläimet lisääntyvät tällä tavoin. Normaalisti jokainen yksilö kykenee lisääntymään, toisin kuin yhdyskunnissa, joissa vain muutamalla on mahdollisuus lisääntyä. Samaa taktiikkaa tiedetään käyttävän muutamat muurahaislajit. Lisääntymistaktiikka on poikkeuksellisen suureellinen. Yksi kuningatar munii sadoittain uusia työläisiä ja kuhnureita. Kun kuhnurilla on vain kuningattaren geenejä, taataan omien geenien jatkuvuus seuraavassa sukupolvessa. (Hokkanen H, Mehiläispesä on ihmelaitos).

2.2.2 Laskemista luonnossa

Aika: 45 min
Työtapa: Ryhmätyöskentely kiertopisteillä
Tehtävä: Suorita kaikki kolme pistettä ryhmän kanssa. Jokaisen tehtävän tekoon on varattu 15 minuuttia. Ryhmänkoko 3-4 oppilasta.
Kiertopisteet: 1. Luonnosta löytyvät symmetriat. 2. Suorakulmaisen kolmion muodostaminen narulla. 3. Puun korkeuden mittaaminen .
Esitiedot: Symmetrian käsite ja Pythagoraan lause, trigonometriset funktiot

1. Luonnosta löytyvät symmetriat

Rastin tarkoitus on auttaa oppilaita ymmärtämään, että symmetrioita on kaikkialla. Rastilla on moniste (liite 2), josta oppilaat voivat palauttaa mieleen kolme pääsymmetriaa; kierto, heijastus ja siirto. Tämän jälkeen oppilaiden on tarkoitus etsiä vähintään yksi esimerkki luonnosta jokaisesta symmetrian muodosta. Opettajan tulee sijoittaa rasti siten, että oppilaiden on mahdollista löytää erilaisia symmetrian muotoja. Oppilaat voivat kerätä, ottaa kuvia tai piirtää ja kuvailla asiat, joista symmetrioita havaitsivat. Tehtävän tarkoitus on palauttaa mieleen opitut symmetriat ja herätellä ajatuksia siihen, että matematiikkaa on kaikkialla. Esimerkkejä, mistä symmetrioita voi löytää: kasvit, kukat ja niiden kukinnot, kävyt ja rakennukset.

Tehtävä kehittää ryhmätyötaitoa ja ympäristön havainnointia. Jos ryhmä on suorittanut tehtävän nopeasti, voivat he tutkia kävystä löytyviä Fibonaccin spiraaleja. Tehtävämonisteessa löytyy ohje käpyjen tutkimiseen, tarkempi selostus tunnin alun motivoinneissa. Tehtävätyyppinä tämä on hyvin samankaltainen kuin ensimmäisenä esittelemäni tehtävä. Kertaaminen on kuitenkin tärkeää ja tämän tehtävän avulla lisätään ymmärrystä siitä, mistä kaikkialta symmetrioita löytyy.

2. Suorakulmaisen kolmion muodostaminen narulla

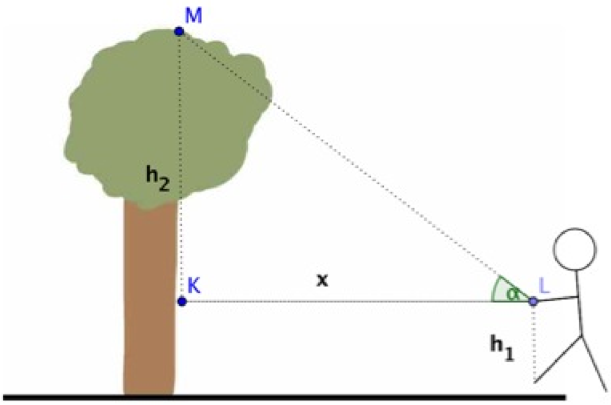
Rastilta löytyy 12 m pitkä naru, metrin mitta ja tehtävämoniste. Oppilaiden tehävänä on muodostaa suorakulmainen kolmio, jonka ympärysmitta on 12 metriä. Vihjeenä ryhmälle voi antaa Pythagoraan lauseen, jos ratkaisua ei tunnu löytyvän. Tehtävän avulla Pythagoraan lause ja sen syvin olemus painautuu oppilaan mieleen ja näin ollen hänen on helpompi myöhemmin tehtävissä soveltaa lauseen käyttöä. Mielestäni on tärkeää yhdistää selkeä muistijälki opittuun asiaan jonkin konkreettisen tekemisen avulla, jolloin oppilaan on helpompi muistaa myöhemmin opittu asia.

Jos ryhmä keksii nopeasti ratkaisun, tulee heidän vielä todistaa kolmio suorakulmaiseksi piirtämällä. Tästä syystä tehtävä kannattaa sijoittaa esimerkiksi hiekkakentälle, jossa maahan voi narun ja mitan avulla piirtää. Todistamiseen on monia tapoja, mutta helpoin on piirtää jokaisen sivun neliöt kolmion ympärille ja jakaa ne samankokoisiin neliöihin esimerkiksi metri kertaa metri. Tämän jälkeen lasketaan jokaisen sivun neliöiden sisällä olevat neliöt ja huomata, kuinka hypotenuusan neliössä on yhtämonta neliötä kuin sivujen neliöissä yhteensä. Lisää erilaisia todistustapoja löytyy kandidaatintutkielmastani, johon olen yrittänyt koota yläkouluun sopivia Pythagoraan lauseen todistustapoja.

3. Puun korkeuden mittaaminen

Rastilta löytyy tehtävämoniste, rulla- ja kulmamitta. Rasti tulee sijoittaa puun läheisyyteen tai vaihtoehtoisesti, jos puita ei ole lähistöllä, voidaan mitata myös rakennuksen korkeus. Jälleen kerran oppilaat pääsevät hiomaan ryhmätyöskentelytaitojaan ja tehtävien jakamista ja ongelmanratkaisutaitoa. Oppilailla on edessään kaikki tarvittavat välineet puun korkeuden laskemiseen ja ohjeet välineiden käyttöön. Kuvan piirtäminen tilanteesta helpottaa monia, joten siihenkin pitää olla mahdollisuus. Oppilaiden tulee siis mitata mittaajan ja mitattavan kohteen etäisyys ja muistaa ottaa huomioon korkeus, jolta mittaaja kulman mittaa.

Korkeuden mittaamiseen on monia tapoja yksinkertaisilla välineillä ja tässä esittelemäni on vain yksi. Kulttuuriympäristö osaksi matematiikan opetusta eli KuMa:n nettisivuilla on selitetty havainnollistavin kuvin eri menetelmiä korkeuden mittaamisesta. Tässä esittelemääni tapaan kyseisiltä nettisivuilta löytyy myös havainnollistava esimerkki kuvineen. Suosittelen tutustumaan kyseiseen sivustoon, sillä sieltä löytyy paljon hyödyllistä materiaalia luonnossa toteutettavaan matematiikkaan.



30.

Tehtävän avulla oppilaat voivat kehittää kriittistä ajattelua tuloksiin. Jokainen oppilas voi mitata kulman, jolloin huomataan, että mittaustulos on mittaajasta kiinni. Oppilaiden on hyvä myös pohtia, onko saatu tulos mahdollinen. On tärkeää oppia tarkastelemaan kriittisesti saatua tulosta: 'onko mahdollista, että puu on 53 metriä pitkä?'. Tehtävän avulla oppilaat pääsevät itse miettimään omaa mittaustaan ja sen paikkansa pitävyyttä. Lopuksi voidaan myös pohtia jos vastauksia on useita, että kuka onkaan oikeassa vai onko kysymykseen oikeaa vastausta. Opettajan on hyvä mitata mitattava kohde etukäteen, jotta on jokin arvo, johon oppilaiden tuloksia voidaan verrata.

2.2.3 Tunnin alun motivointeja

Ystäväni valmistui artesaaniksi muotoiluinstituutista ja kertoi, kuinka heillä oli siellä ollut kokonainen kurssi aiheesta matematiikka luonnossa. Kurssilla he olivat käsitelleet muotoilun näkökulmasta Fibonaccia ja kultaista leikkausta ja muuta luonnosta löytyvää matematiikkaa. Hän oli ihmeissään, että miksei näistä asioista kerrottu peruskoulussa mitään. Hänen mielestään matematiikka olisi saattanut kiinnostaa enemmän, jos olisi ymmärtänyt, että sitä on kaikkialla ja se voi olla näinkin mielenkiintoista. Tämä sai minut pohtimaan sitä, miten saisin tuotua yläkoulun opetukseen mukaan tämän näkökulman. Päädyin tunnin alun motivointeihin. Näiden avulla on tarkoitus esitellä oppilaille erilaisia paikkoja, joissa matematiikka on. Tutkielmassani esittelemäni esimerkit ovat luonnon geometriaa, mutta samanalaisia motivointeja saa mistä tahansa matematiikan aiheesta.

Seuraavaksi esittelen muutaman tavan aloittaa tunti motivoimalla oppilaat näkemään sen, missä kaikkialla matematiikkaa on. Jos opettajalle on haastavaa integroida matematiikka oppilaiden muuhun elämään, on näiden opetustuokioiden tarkoitus helpottaa tätä. Opettajan ei tarvitse yrittää väkisin joka aiheeseen keksiä, miten opettaa innostavasti ja integroiden, vaan näiden tuokioiden avulla näyttää oppilaille matematiikan monimuotoisuus. Yksi vaihtoehto on, että opettaja aloittaa joka viikon ensimmäisen matematiikan tunnin jollain integroivalla motivoinnilla. Seuraavien opetustuokioiden on tarkoitus olla esimerkkejä miten motivoinnin voi toteuttaa. Olen tehnyt jokaiseen tuokioon slideshown, jonka tarkoitus on toimia punaisena lankana tuokion ajan. Olen jakanut nämä esitykset slideshare.net-palvelussa. Slideshare on palvelu, jossa kuka tahansa voi jakaa oman esityksensä muille tai etsiä jonkun muun jakaman esityksen ja käyttää sitä. Jokaisen motivoinnin kohdalla on suora linkki, josta kyseiseen tuokioon liittyvä esitys löytyy. Esitykset löytyvät myös liittenä tutkielman lopusta.

Vaikka tuokioni ovatkin opettajajohtoisia, pyrin luomaan ne niin, että ne olisivat silti oppilaskeskeisiä. Tämä tarkoittaa sitä, että oppilas pääsee opettajajohtoisesti kokeilemaan itse ja keskustelemaan. Paras tilannehan olisi, että opettajan motivointi herättäisi keskustelua oppilaissa, jolloin tuokio etenisi oppilaiden kiinnostuksen kautta eikä opettajakeskeisesti oppilaiden kuunnellessa. Muistijälki jää aina vahvempana, jos aihe on herättänyt jonkun tunteen oppilaassa ja saanut oppilaan ajattelemaan, tämän olen huomannut oman kokemukseni kautta.

Fibonaccin lukujono
Aika: 10 min
Työtapa: Opettajajohtoinen opetus
Tarvikkeet: Ananas, käpyjä, tusseja, nuppineuloja ja kaksi eri väristä narua.
SiledeShare: http://www.slideshare.net/ryhta/fibonaccin-lukujono
Taustamateriaali: 2.2 Fibonaccin lukujono

Tuokion aluksi pohditaan lukujonoja. Taululla on esimerkkejä lukujonoista ja jokainen saa pohtia, miten mikäkin jatkuu ja keksiä kaavan, miten lukujono muodostuu. Viimeinen lukujonoista on Fibonacci, jotta siitä helposti voidaan siirtyä Fibonaccin spiraaleihin. Seuraavaksi opettaja näyttää ananaksen, esityksessä on myös kuvat tästä, mutta aina havainnollistavampaa on, jos opettajalla on konkreettinen ananas mukanaan. Opettaja pistää nuppineulat kiinni ananakseen siten, että niihin voidaan kiinnittää narut. Narut on tarkoitus kiinnittää siten, että selvästi nähdään molempiin suuntiin olevat spiraalit. Opettaja laskee montako spiraalia kumpaankin suuntaan on. Tämän jälkeen oppilaat värittävät erivärisillä tusseilla pareittain käpyjen suomuihin pisteet havainnollistamaan erisuuntiin olevia spiraaleja. Oppilaat laskevat spiraalit kävyistä. Huomataanko mitään? Löydetäänkö yhteys Fibonaccin lukujonoon? Lopuksi opettajan on hyvä koota löydökset, jotta oppilaat ymmärtävät yhteyden, eikä kaikki jää vain irrallisiksi hassutteluksi. Selitys siitä, miksi kasvit kasvattavat Fibonaccin spiraaleja löytyy tutkielmani sivulta 6. Oppilaiden kanssa on hyvä pohtia, että mistä muualta Fibonaccin spiraaleja löytyy. Esityksen lopussa on kuvia kukista, joissa esiintyy kyseisiä spiraaleja.

Tuokio on tarkoitus pitää lyhyenä, vain 10 minuutin mittaisena, ja sen on tarkoitus herättää ajatuksia ja keskustelua oppilaissa. Vaikka aihe jäisikin oppilaille irralliseksi muusta opetuksesta, jää heille muistijälki myöhempiä opintoja varten, että tälläistäkin on olemassa. Tuokiossa oppilaat pääsevät itse kokeilemaan ja huomaamaan, että kaikissa kävyissä löytyy sama yhdenmukaisuus. Jos opettaja näyttäisi vain kuvia, saattaa oppilaissa herätä epäilys siitä, että opettaja on löytänyt yhden yksilön, jossa tämä toteutuu, eikä siksi välttämättä pädekään aina. On myös hyvä keskustella oppilaiden kanssa mahdollisista poikkeamista, joita on esimerkiksi mutaatiot.

Fraktaalit

Aika: 10 min
Työtapa: Opettajajohtoinen opetus
Tarvikkeet: Kolme karttaa samalta alueelta eri mittakaavoilla ja mittoja
Taustamateriaali: 2.4 Fraktaalit

Oppilaat mittaavat pareittain kartasta matkan rantaviivaa pitkin, esimerkiksi Porista Turkuun. Kun jokainen pari on saanut mitattua matkan, otetaan luvut ylös taululle. Mittaustulokset on hyvä jaotella taululla selkesti kategorioihin, minkä mittasuhteen kartalta tulos on mitattu. Mitä huomataan? Onko tuloksissa suuria eroja? Mietitään tulisiko tuloksesta vielä eri jos otettaisiin vielä tarkempi kartta? Entä jos mentäisiin paikan päälle mittaamaan? Mikä tulos on oikea ja onko sellaista olemassa? Kun oppilaiden kanssa on huomattu, että tulos on joka mittaajalla hieman erilainen ja matka on pidempi mitä tarkemmalla mitalla sen mittaa, päästään fraktaaleiden ytimeen. Seuraavaksi oppilaiden kanssa pohditaan mitä fraktaalit ovat ja mistä niitä löytyy? Tietoa fraktaaleista löytyy tutkielmani sivulta 10.

Fraktaaleista en tehnyt diaesitystä, koska on hyödyllisempää, että opettaja käyttää omia kuviaan ja mielenkiinnon kohteita esitettävissä kuvissa. Tuokion pääpaino pysyy kuitenkin oppilaan tekemisessä, jolloin välttämättä muita kuvia ei edes tarvita. Toki rantaviiva on hyvinkin yksipuolinen esimerkki, jolloin on hyvä esittää kuvia viruksista ja erilaisista kasveista, joissa fraktaaleja esiintyy. Fraktaali käsitteenä saattaa olla haastava yläkoululaiselle, jolloin on hyvä pysyä asian kanssa aivan perusjutuissa.

Lopuksi näytetään animaation Kochin lumihiutaleesta ja pohditaan, mitä tarkoittaa äärettömän pitkä viiva äärellisellä alueella. Kyseinen animaatio löytyy esimerkiksi Kochin käyrän wikipedia-artikkelista, josta sen voi luokalleen näyttää. Opetustuokion haasteena on äärettömyyden käsite. Joillekin yläkoululaisille ääretön voi olla hankala ymmärtää ja siksi koko aihe menee yli ymmärryksen. Ymmärtämistä pyritään tuokiossa helpottamaan sillä, että oppilaat pääsevät itse mittaamaan rantaviivan pituutta ja näin ollen huomaamaan eron tuloksissa. Tehtävässä päästään kertaamaan myös yksikkömuunnoksia ja mittasuhdetta.

Kultainen leikkaus

Aika: 20 min
Työtapa: Opettajajohtoinen opetus
Tarvikkeet: moniste (liite 3), kartonkia, sakset ja haaranastoja
SiledeShare: http://www.slideshare.net/ryhta/kultainen-leikkaus
Taustamateriaali: 2.3 Kultainen leikkaus

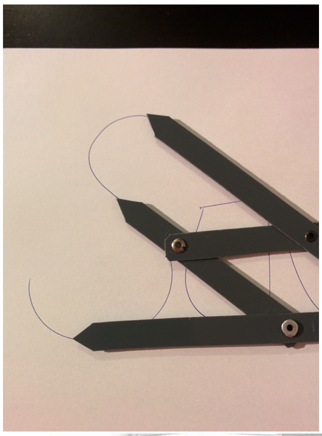
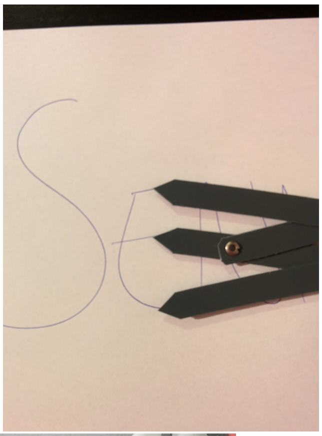
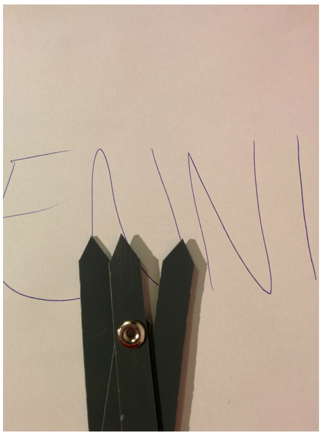
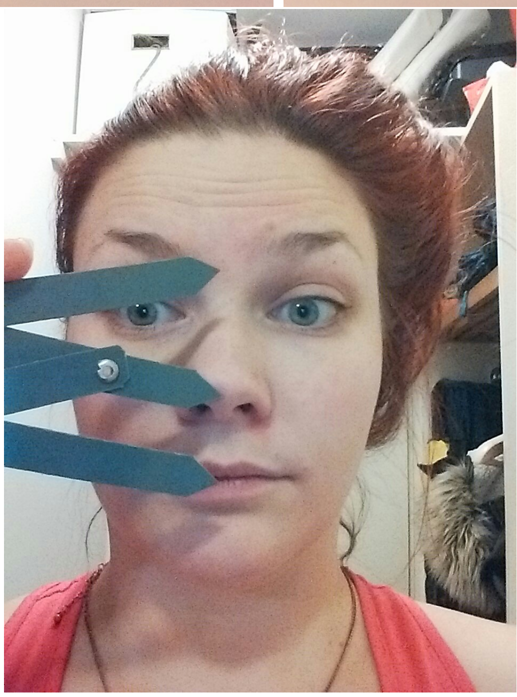
Tuokio alkaa sillä, että opettaja pyytää oppilaita kirjoittamaan oman etunimensä A4-kokoiselle paperille. Nimi tulee kirjoittaa tarpeeksi isolla, jotta kirjaimet ovat selkeitä. Tehtävään ei ole tarkoitus käyttää sen enempää aikaa ja nimilaputkin unohdetaan tuokion loppuun saakka.

Tämän jälkeen opettaja esittelee kultaisen leikkauksen. Mitä se tarkoittaa? Pohditaan oppilaiden kanssa, missä kaikkialla kultaista leikkausta esiintyy. Opettaja kertoo kultaisen leikkauksen viehättäneen aina ihmissilmää ja esittää kuvia rakennuksista ja taiteesta, missä kultaista leikkausta esiintyy. Miksi kultainen leikkaus esiintyy luonnossa ja missä? Miksi kultainen leikkaus? Jälleen pääsemme optimoituun tilankäyttöön. Luonnossa kaikki pyrkii järjestäytymään pienimmän energian tilaan (Dunlap, s.128) ja kultainen leikkaus mahdollistaa tilankäytön optimoinnin. Oppilaiden kanssa voidaan pohtia tässä vaiheessa myös evoluution vaikutusta kultaisen leikkauksen esiintymiseen luonnossa. Kultaisella leikkauksella varustetut yksilöt ovat selvinneet paremmin, esimerkiksi kukan terälehden pituuden suhde kukintapohjaan, jolloin terälehden hyötysuhde on optimaalinen.

Esityksessä on tällä hetkellä kuva Eiffel-tornista. Kuvasta on hyvä huomata, että sen asettelusta löytyy kultainen leikkaus, sekä itse tornin mittasuhteissa on kultainen leikkaus. Tämän lisäksi esityksessä on kuva rusinarasiasta, jonka tekstin suhteita on mitattu kultaista mittaria apuna käyttäen. Viimeinen kuva on kukasta, jonka terälehtien suhde kukintapohjaan on kultainen leikkaus. Opettajan kannattaa etsiä kultaista leikkausta ympäriltään ja lisätä esitykseen esimerkiksi koulun ympäristöstä otettuja kuvia, joissa on kultainen leikkaus. Esimerkkikuvat ovat hyvin erilaisista kohteista, jotta oppilaat huomaavat kultaista leikkausta esiintyvän kaikkialla.

Tuokion lopuksi askarrellaan Eddy Levinin kehittämä kynsi, jonka avulla voidaan mitata osien kultaista suhdetta. Ohje kynnen askarteluun löytyy liitteestä 3. Kun kynsi on valmis, oppilas etsii ympäriltään kolme asiaa, jotka noudattavat kultaisen leikkauksen kaavaa. Tuokio päättyy koontiin, jossa oppilaat saavat itse kertoa mistä kultaisen leikkauksen suhdetta löysivät. Nyt opettaja käskee oppilaita tutkimaan tunninalussa kirjoittamaansa lappua, ellei tämä tullut esiin oppilailta itseltään. Jokainen saa vielä kokeilla löytää kultaista suhdetta omasta kirjoituksestaan. Tämän tehtävän tarkoitus on havainnolistaa, että kultainen leikkaus ilmestyy huomaamatta moniin paikkoihin.

Tuokion tavoitteena on innostuttaa oppilas tutkimaan ympäristöään ja havainnoimaan matematiikkaa ympäristössä. Luonnossa kultaista leikkausta löytyy paljon, joten vapaa-ajallaankin oppilaan on helppo löytää kohteita, joissa suhde esiintyy. Kirjoituksesta löytyvien kultaisten leikkauksien on tarkoitus auttaa ymmärtämään, että kultaista leikkausta on todellakin kaikkialla ja muotoa ei aina suunnitella kultaisen leikkauken kautta, vaan se tulee siihen kuin itsestään. Alla olevissa kuvissa käytän isäni minulle askartelemaa muovista kultaisen leikkauksen mittatikkua. Kuvien tarkoitus on näyttää, miten nimilapusta on tarkoitus etsiä kultaista leikkausta ja miten kultainen leikkaus näkyy kasvoissa.

3 Pohdinta

3.1 Taustamateriaali

Taustamateriaalia kirjoittaessa oli vaikea miettiä sitä, kuinka laajasti kyseessä olevat asiat haluan selittää ja kenelle niitä olen selittämässä. Jokaisesta taustamateriaalini aiheesta olisi löytynyt loputtomasti materiaalia, mutta työni olisi paisunut helposti todella isoksi. Tästä syystä päätin kirjoittaa jokaisesta aiheesta lyhyen selostuksen, jolla saa ideasta kiinni. Jokainen voi sen jälkeen oman kiinnostuksen mukaan etsiä aiheista lisää tietoa. Toinen ongelma, johon törmäsin jatkuvasti, oli lukijan taustatiedot. Osaako lukija aiheesta biologian vai matematiikan ennestään. Päädyin kirjoittamaan itselleni, jolloin kummastakin näkökulmasta tuli kirjoitettua vain lyhyt katsaus. Työni avulla kummastakaan aiheesta mitään tietämättömän pitäisi silti päästä jyvälle perusasioista.

Opettajat eivät kaipaa taustamateriaalia, vaan selkeän suoraan käyttöön otettavan materiaalin (Rintala, s.53). Tästä syystä halusin keskittyä opetusmateriaalin luomiseen, enkä taustamateriaaliin. Taustaa oli pohjustettava kuitenkin sen verta, että kuka tahansa ymmärtää mistä on kyse. Oppimateriaalissa viittaankin työstä löytyvään taustamateriaaliin, jotta lukija voi palata halutessaan tarkentamaan tietämystään jostakin aiheesta. Olisi toki myös mielenkiintoista kirjoittaa kokonainen teos aiheesta matematiikka luonnossa, jossa voisi selvittää aivan kaiken ja pohtia miksi mikäkin on kehittynyt nykymuotoonsa. On myös kiehtovaa pohtia miten asioiden nykyisen tilan pystyisi selittämään ilman evoluutioteoriaa.

Selitän teoriaosioni alussa lyhyesti evoluution merkityksen organismien tavassa toimia ja sen miten itse koen asian olevan. Tämä ei kuitenkaan ole faktatietoa, vaan omien opintojeni ja pohdintojen tulos ajattelussani. Luonnonvalinnalla pystyy helposti selittämään monet asiat, ainakin sellaiselle joka ymmärtää evoluutioteorian. Ongelmaksi muodostuikin, että voinko olettaa lukijan tuntevan kyseisen teorian ja kuinka tarkasti tälläisiä omasta mielestäni perusasioita pitäisi työssä käsitellä. Toivottavasti jokainen lukija saa kuitenkin työstäni irti edes jotain ja innostus aiheeseen syttyisi jollakin. Samalla pohdin sitä, miten koulussa näitä asioita voi nykymaailmassa opettaa. Entä jos luokassa on oppilaita, jotka eivät vakaumuksen tai muun takia usko evoluutioteoriaan, vaikka siitä selvät todisteet ovatkin? Oppilaalle voi toki opettaa, että tälläinen teoria on olemassa ja tässä on perusteet sille, mutta eihän ketään voi pakottaa uskomaan oman vakaumuksensa vastaisesti. Tälläiset ajatukset ovat tietysti vain sivujuonteita ja merkityksettömiä tämän työn osalta, mutta jokaisen aihetta opettavan on hyviä niitä pohtia ennen luokan eteen astumista.

Opetuksen eheyttämisestä olisin voinut kirjoittaa loputtomiin. Huomasin jo nyt, että tämä aihe on lähellä sydäntäni ja omat ajatukseni eheyttävästä opetuksesta on selkiytynyt. Käydessäni keskusteluita ystävieni kanssa ja joutuessani puolustamaan näkökulmaani integroivan opetuksen hyödyistä, huomasin kuinka paljon asia minulle itselle merkitsee. Näitä keskusteluja käydessäni sain positiivista palautetta aiheestani, joka motivoi kirjoittamaan työtäni eteenpäin. Eheyttävän opetuksen historiallista näkökulmaa oli äärimmäisen mielenkiintoista lukea ja siihen olisin halunnut perehtyä enemmänkin. Harmi, että aiheesta löytyi hyvin pirstaleisesti tetoa.

3.2 Opetustuokiot ja niiden kehittäminen

Useamman kerran kirjoitusprosessin aikana keskustelin erilaisten ihmisten kanssa työstäni ja jokaisessa keskustelussa esiin nousi se, että aiheeni on mielenkiintoinen ja miksei tämänkaltaista integraatiota jo ole opetuksessa. Saman huomasin tutkiessani eheyttävän opetuksen historiaa. Aihetta on tutkittu vähän, mutta tulokset ovat pääsääntöisesti myönteisiä, miksei tutkimus siis vaikuta opetukseen? Koulu järjestelmänä on tällä hetkellä mielestäni niin vanhanaikainen ja systeemin muuttaminen on hidasta ja kankeaa.

Ensimmäinen muutos pitäisi tapahtua opettajankoulustuksessa. Tulevat opettajat koulutettaisiin eheyttävän opetuksen avulla. Omasta kokemuksestani voin sanoa, että eheyttämisestä ja innovatiivisesta opetuksesta puhutaan kyllä paljon, mutta jos se ei näy opettamisessa, onko siitä hyötyä? Opettajankoulutuslaitoksen pitäisi siis ottaa omat oppinsa käyttöön omassa opetuksessaan. Vain tällä tavoin tulevat opettajat saavat mallin toimivista käytänteistä. Ei siis ole järkeä pitää massaluentoa opettajakeskeisesti opettajakeskeisen opetuksen huonoista puolista.

Kun opettajakoulutus on saatu nykyaikaistettua, voidaan tuoda koulusysteemi myös tälle vuosituhannelle. Tänäkin päivänä on esimerkkejä yksittäisistä uraa uurtavista opettajista, jotka luovat omia käytänteitään ja saavat tunnustusta innovatiivisesta ja oppilaslähtöisestä opetuksesta. Tälläisestä voidaan nostaa esimerkkinä ylös Pekka Peura. Yksittäiset opettajat eivät kuitenkaan pysty muuttamaan koko koulujärjestelmää, vaan siihen tarvitaan koko työyhteisön apu, sekä päättäjien avarakatseisuutta. Toivottavasti olemme kuitenkin menossa parempaan suuntaan ja työni innostaa opettajia näkemään omat mahdollisuutensa eheyttävän opetuksen järjestäjinä.

Huomasin opetustuokioita kirjoittaessani, että haluaisin tehdä monta variaatiota jokaisesta tehtävästä, jotta jokainen varmasti löytäisi sieltä mieleisen tavan tehtävän toteuttamiseen. Ideoita oli paljon ja niistä oli valittava vain muutama, jotta työn idea säilyy. Tarkoituksenani ei kuitenkaan ollut tehdä tehtäväpankkia, vaan antaa esimerkkejä integroinnin toteuttamiseen. Tästä syystä päätin rajata variaatio-esimerkit vain muutamaan jokaisen tehtävän kohdalla ja tarvittaessa antaa esimerkkejä, mistä hyviä tehtäviä aiheeseen löytyy työni ulkopuolelta.

Jatkokehitysideana mietin sellaista teemafoorumia, minne voisi kerätä materiaalia eheyttävää opetusta varten. Sinne voisi luoda jokaiselle vuosiluokalle oman osionsa ja jakaa vuosiluokan teemoihin opetussuunnitelman perusteella. Mitä yhteistä eimerkiksi kahdeksannen luokan eri aineiden opetussuunnitelmissa on ja näiden alle voisi luoda valmiita pakettaja, joiden avulla integrointia voi toteuttaa. Sivuston voisi toteuttaa myös siten, että jokaisen aineen kohdalla olisi käyty opetussuunnitelma läpi ja luotu integroivia vaihtoehtoja opetukseen. Tällainen systeemi voisi toimia paremmin, sillä silloin jokainen opettaja voisi omien vahvuuksiensa kautta luoda integroivia opetustuokioita kaikkien käyttöön. Tämä tukisi myös ajatusta siitä, ettei yläkoulun opetusta yritettäisikään väkisin viedä kokonaisopetuksen suuntaan vaan jokainen opettaja integroisi omien vahvuuksiensa avulla omaa opetettavaa ainetta ympäröivään maailmaan.

Minulla on mahdollisuus kevään aikana kokeilla muutamia opetustuokioitani Tuusulan yläkoulun matematiikan pajapäivässä. Päivä toivottavasti tuo lisää kokemusta integroivaan opettamiseen ja auttaa löytämään epäkohdat suunnittelemissani tuokioissa. Tuokiot pääsevät myös muiden opettajaksi opiskelevien pidettäviksi kyseisessä pajapäivässä, joten toivon saavani palautetta myös muilta ja näin ollen voin tulevaisuudessa kehittää entistä parempia kokonaisuuksia kaikkien käyttöön.

Viitteet

[1] Alex Bellos (suom. Eero Sarkkinen): Kiehtova matematiikka; Seikkailu numeroiden ihmemaassa, Docendo, 2010

[2] Armin Bunde & Shlomo Havlin: Fractals in Science, Springer-Verlag, 1994.

[3] Richard A. Dunlap: The Golden Ratio and Fibonacci Numbers, World Scientific Publishing Co, 1997.

[4] Reijo Laukkanen, Esko Piippo, Alina Salonen: Ehyesti elävä koulu; Kohti kokonaisvaltaista oppimista, VAPK-kustannus, 1990.

- Tuula Raatikainen: Eheyttämisen historiaa, s. 15-25.
- Esko Piippo: Kokonaisopetuskokeilu Teppanan koulussa, s.123-140

[5] Benoit B. Mandelbrot; Fractals: form, chance, and dimension; 1977.

[6] Benoit B. Mandelbrot: The Fractal geometry of nature, 1977.

[7] Reetta Niemi: Onks tavallinen koe vai sellanen, missä pitää miettii? Ympäristölähtöisen terveyskasvatuspedagogiikan kehittäminen narratiivisena toimintatutkimuksena, Jyväskylän yliopisto, 2009.

[8] Tiina Rintala: Kolmiulotteisuuden hahmottaminen eheytetyn opetuksen teemana, Helsingin yliopisto, 2008.

[9] Senni Ryhtä: Pythagoraan lause, Helsingin yliopisto, 2015.

[10] Rauno Tirri, Juhani Lehtonen, Risto Lemmettyinen, Seppo Pihakaski ja Peter Portin: Biologian sanakirja, Otavan kirjapaino, 2001

[11] N. N. Vorob'ev: Fibonacci Numbers, Blaisdell Punlishing Company, 1961.

[12] Hermann Weyl, suomentanut Kimmo Pietiläinen: Symmetria, Hakapaino 1999.

[13] Heikki Hokkanen, Mehiläispesä on ihmelaitos, 2014. http://www.tiede.fi/artikkeli/jutut/artikkelit/mehilaispesa_ on_ ihmelaitos (7.10.2015)

[14] Janne Jokinen, Janne Jokisen mehiläishoitosivut, 2005-2005. http://www.saunalahti.fi/nenikoj/hunaja/mehilaisbiologia.html (28.10.2015)

[15] Marika Toivola ja Tiina Härkönen, Avoin oppikirja 8lk, osio 3. http://avoinoppikirja.fi/tiedostot/ylakoulu/matematiikka/avoin_ matematiikka_ 8lk_ osio3.pdf (3.11.2015)

Kuvat

Kuvat 1-3,11,12,14,15,17,21-25,29 ja 30 ovat itse GeoGebralla piirrettyjä.
4. David Perez
https://fi.wikipedia.org/wiki/Tiedosto:Pacifastacus_ leniusculus_ 01_ by-dpc.jpg (28.10.2015)
(kuvaan lisätty itse symmetria-akseli)
5.Hans Hillewaert
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ophrys_ apifera_ %28flower%29.jpg (7.10.2015)
6. https://pixabay.com/en/starfish-sea-animal-aquarium-604234/ (28.10.2015)
7. https://pixabay.com/fi/k%C3%A4vyt-m%C3%A4nty-puu-m%C3%A4nty-t%C3%B6tter%C3%B6t-8167/ (7.10.2015) (kuvaan lisätty itse spiraalit)
8. https://pixabay.com/en/sunflower-flower-floral-wildflower-348207/ (7.10.2015)
9. https://pixabay.com/en/daisy-daisies-floral-plant-natural-50159/ (7.10.2015)
10. Alex Bellos, Kiehtova matematiikka
13. David Bygott
https://www.flickr.com/photos/davidbygott/5241519842 (7.10.2015)
16. https://fi.wikipedia.org/wiki/Tiedosto:Fibonacci$_{s}piral_{3}4.svg$(3.11.2015)
18.*OonaRisnen*
https : //fi.wikipedia.org/wiki/Kartta#/media/File : Map_of_Finland−fi.svg(7.10.2015)
19.*https : //commons.wikimedia.org/wiki/File : Open_Street_Map_Turun_saariston_kartta.jpg*
20.*https : //pixabay.com/fi/aalto−selv%C3%A4sti−vesi−ranta−hiekka*−744302/(7.10.2015)
26. − 28.*MarkusNiinikoski*, 2015

4 Liitteet

4.1 Liite 1

Mehiläisten matematiikkaa

Tehtävä 1

Etsi ympäriltäsi muotoja, jotka ovat symmetrisiä keskenään. Kuvaile, kuvaa tai piirrä symmetriset muodot ja ota mukaan seuraavalle tunnille.

Tehtävä 2

Tutki erilaisten kappaleiden pohjan piirin ja pinta-alan suhdetta. Mittaa mittanauhalla piirin pituus. Laske pohjan pinta-ala, kaavat löytyvät taulukon alapuolelta. Kirjaa saamasi arvot taulukkoon.

Kappaleen pohjan muoto	pohjan piiri	pohjan pinta-ala	piiri/pinta-ala

Millä muodolla on pienin piiri/pinta-ala suhde?

Millä suurin?

Tehtävä 3

Ryhmätyö, esitelmien aiheet:
1. Mehiläispesän toiminta
2. Mehiläispesän rakenne
3. Mehiläispopulaatio ja lisäääntyminen

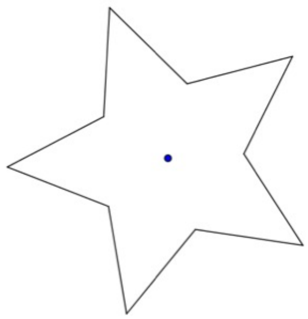
4.2 Liite 2

Laskemista luonnossa

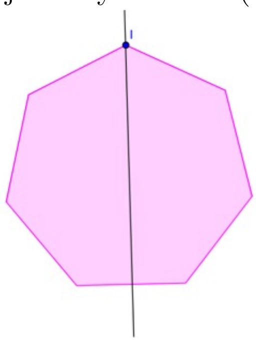
Rasti 1

Luonnosta löytyvät symmetriat

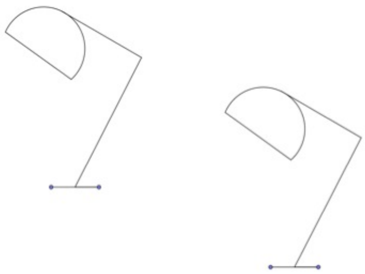
Kiertosymmetria (säteittäissymmetrinen)



Heijastussymmetria (Kakasikylkisymmetrinen)



Siirtosymmetria



Tehtävä: Etsi erilaisia symmetrioita luonnosta.

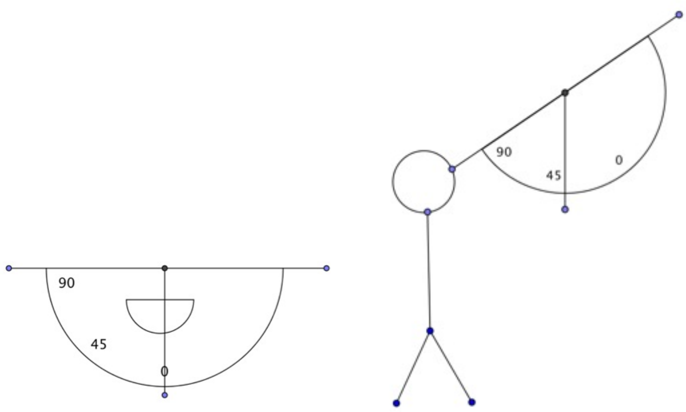
Kysymyksiä:

Mitä symmetriaa on helpoin löytää?

Vertaile oman ryhmän jäsenten kesken löytyneitä symmetrioita.

Rasti 2 Suorakulmainen kolmio
Tarvikkeet: 12 metriä pitkä naru, metrin mitta.
Tehtävä: Muodostakaa annettuja välineitä apuna käyttäen suorakulmainen kolmio, jonka piirin pituus on 12m.
Kysymyksiä:
Kuinka pitkät ovat kolmionne kanta ja korkeus?
Mistä tiedätte, että kolmionne on suorakulmainen?
Onko tehtävään olemassa muita ratkaisuja?

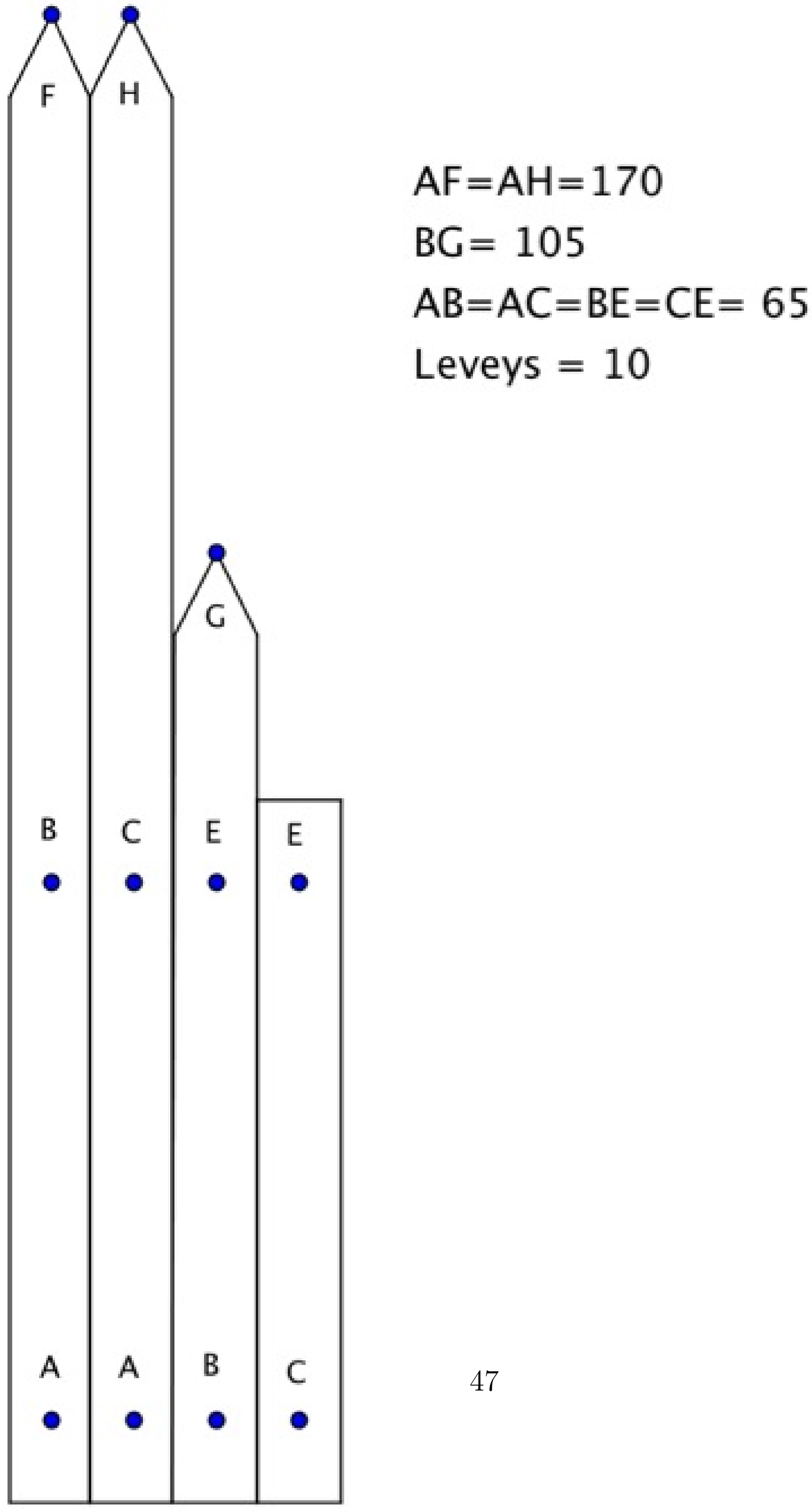
Rasti 3 Puun korkeuden mittaaminen
Tarvikkeet: Kulma- ja metrimitta.
Tehtävä:Tunnistakaa mitattava puu ja mitatkaa annettuja välineitä apuna käyttäen puun korkeus.
Kysymyksiä:
Mitattava puu on:
Kuinka korkea puu on?
Miten laskitte puun korkeuden?



Katso putken läpi mitattavan kohteen latvaan. Luotisuora naru osoittaa astemitalta kulman suuruuden.

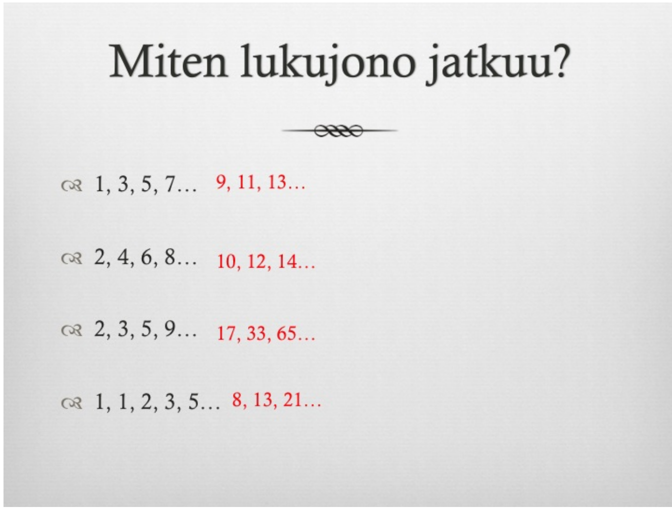
4.3 Liite 3

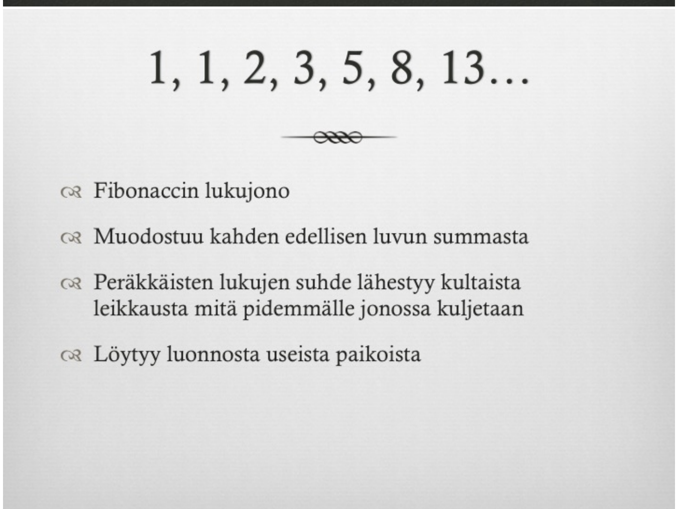
lähde: Alex Bellos, Kiehtova matematiikka; Seikkailu numeroiden ihmemaassa.

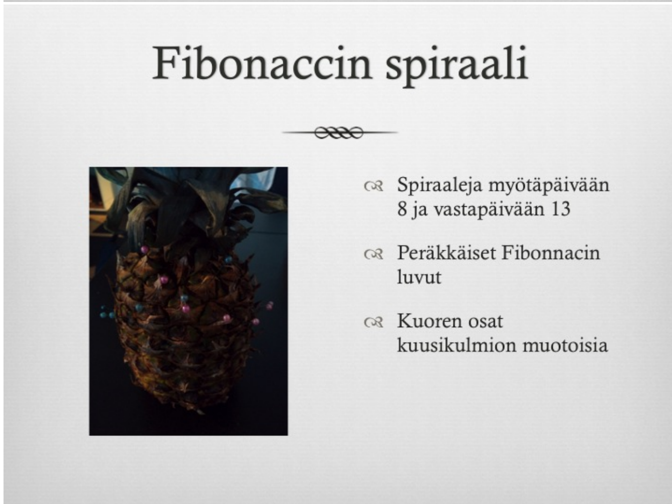


4.4 Liite 4

Diaesitys: Fibonaccin lukujono







Parityöskentelynä:

Etsikää käyvstä Fibonaccin spiraalit. Värittäkää tussilla yksi spiraali toiseen suuntaan ja erivärisellä tussilla yksi spiraali toiseen suuntaan. Tussilla riittää merkitä pieni täplä siemenen suojakuoreen.

Laskekaa montako spiraalia kävyllä on kumpaankin suuntaan.

Mitä hyötyä?

- Optimaalinen tilankäyttö: kasvi pystyy käyttämään hyödykseen koko pinta-alan

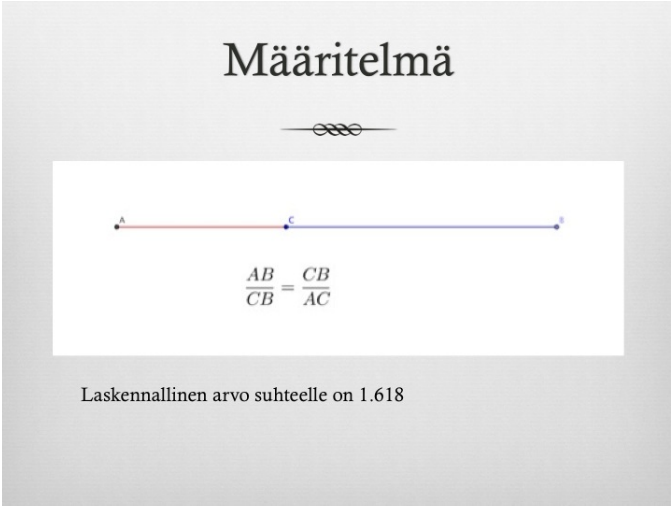
Muita esimerkkejä:

- Auringonkukka

https://pixabay.com/en/sunflower-flower-floral-wildflower-348207/

4.5 Liite 5

Diaesitys: Kultainen leikkaus



https://pixabay.com/en/flower-pink-daisy-close-up-details-164954/

- Karkeasti ottaen kultainen leikkaus on 3/2 mutta tarkempaan arvoon päästään mitä suuremmat peräkkäiset fibonaccin lukujonon luvut otetaan (377/233 = 1,6180)
- Kultainen leikkaus on aina kiehtonut ihmisiä ja se miellyttää ihmissilmää = kaunis

Kultaisen mittarin askartelu

- Leikkaa osat pahvista
- Yhdistä pisteet haaranastalla mahdollisimman tarkasti
- Mittari on valmis, voit alkaa mittailla ympärillä olevia kohteita ja etsiä kultaista leikkausta